

# Farbdynamik auf dem Gitter

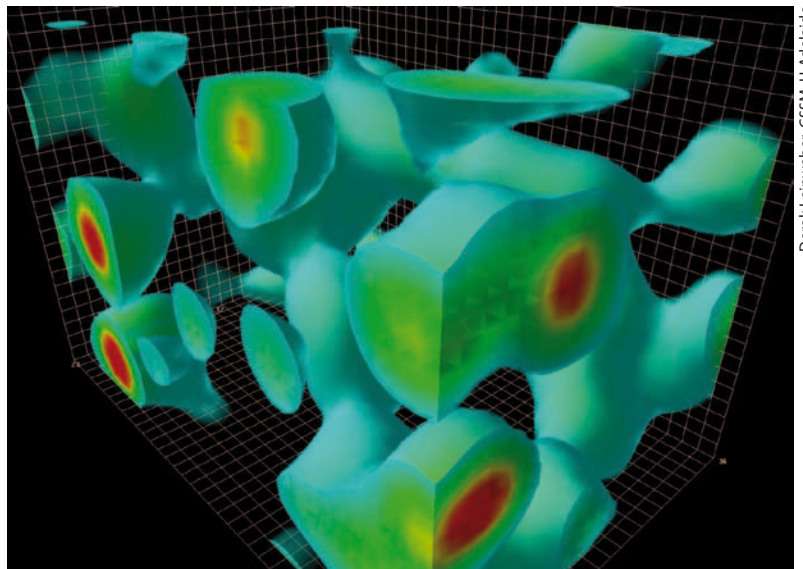
Eine Standortbestimmung für die Gitter-Quantenchromodynamik

Hartmut Wittig

Seit vierzig Jahren kennen wir mit der Quantenchromodynamik (QCD) die Theorie der starken Kraft, bei der die traditionelle Störungstheorie für zentrale Probleme versagt. Fast ebenso alt ist der bahnbrechende Ansatz des Nobelpreisträgers Kenneth Wilson, die Theorie auf einem Raum-Zeit-Gitter zu betrachten und einen Zusammenhang mit der statistischen Physik auszunutzen, um Rechnungen durchzuführen. Trotz des enormen Aufwands erlaubt die Gitter-QCD inzwischen quantitative Vorhersagen.

Die Erforschung der fundamentalen Bausteine der Materie und ihrer Bedeutung für die Entwicklung des Universums ist eines der faszinierendsten Kapitel der aktuellen physikalischen Grundlagenforschung. Die im vergangenen Jahr vermeldete Entdeckung des Higgs-Teilchens am CERN hat die Gültigkeit des Standardmodells der Elementarteilchenphysik eindrucksvoll und mit großer Präzision aufs Neue bestätigt. Die Teilchenphysik wendet sich nun verstärkt der Frage zu, welche „neue Physik“ jenseits des Standardmodells zu erwarten ist. Einige traditionelle Themen wie die Untersuchung der inneren Struktur des Protons oder des Massenspektrums von Hadronen scheinen dabei – zumindest in der öffentlichen Wahrnehmung – in den Hintergrund zu treten. Dies ist die Domäne der starken Wechselwirkung, die neben der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung zu den drei Grundkräften des Standardmodells gehört. Die starke Wechselwirkung vermittelt die Kräfte zwischen den Konstituenten des Protons – den Quarks – und ist außerdem für den Zusammenhalt der Atomkerne verantwortlich. Die zugehörige Eichtheorie ist die Quantenchromodynamik (QCD). Versuchen wir jedoch traditionelle Lösungsverfahren wie die in der Quantenelektrodynamik so erfolgreiche Störungstheorie auf die QCD anzuwenden, so zeigt sich, dass diese Verfahren bei vielen Phänomenen völlig versagen. Dies gilt auch für die quantitative Berechnung von solchen Teilchenzerfällen, die Aufschluss über mögliche Abweichungen vom Standardmodell liefern sollen.

Der spätere Nobelpreisträger (und unlängst verstorbene) Kenneth Wilson schlug bereits 1974 eine nicht-perturbative Lösungsmethode vor. Er hatte die Idee, die Theorie auf einem diskreten Raum-Zeit-Gitter zu formulieren und eine Verbindung zu den Methoden der statistischen Physik herzustellen. Große Anstren-



Derek Leinweber, CSSM, U Adelaide

Das Vakuum der Quantenchromodynamik ist nicht leer, sondern ein komplizierter Zustand mit fluktuierenden Gluonenfeldern, die hier in einem wenige  $\text{fm}^3$  großen Volumen visualisiert sind.

gungen über viele Jahre waren jedoch nötig, um das Instrument der Gitter-QCD so zu verfeinern, dass damit quantitative Vorhersagen über die Eigenschaften hadronischer Materie möglich wurden.

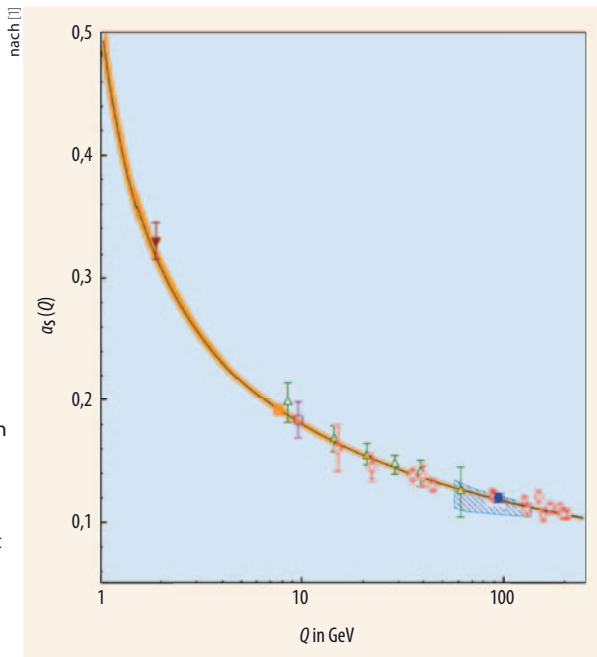
Doch bevor wir dazu kommen, zunächst eine kurze Geschichte der QCD: Protonen und Neutronen bilden zwar den Atomkern, sind aber keine fundamentalen Bausteine der Materie. Seit den 1950er-Jahren sind mehrere hundert Teilchen mit ähnlichen Eigenschaften bekannt, die somit mit gleichem Recht „fundamental“ sind. Diese Situation erinnert an die im 19. Jahrhundert bekannte Vielzahl der chemischen Elemente, die erst verstanden wurde, als diese nach ihren chemischen

## KOMPAKT

- Die Gitter-QCD beruht darauf, die Pfadintegralmethode auf einem Raum-Zeit-Gitter und mit einer euklidischen Metrik zu betrachten, wodurch sich ein mathematisch wohldefinierter Ausdruck für das Pfadintegral ergibt.
- Inzwischen ist es gelungen, die Massen der leichtesten Mesonen und Baryonen sehr genau zu berechnen.
- Die Gitter-QCD erlaubt es auch, Beiträge der starken Wechselwirkung zu elektroschwachen Zerfällen zu berechnen – dies ist wichtig für Präzisionstests des Standardmodells und die Frage nach seinen Grenzen.
- Angesichts des enormen Rechenbedarfs haben Physiker eigens optimierte Rechner entworfen und gebaut.

Prof. Dr. Hartmut Wittig, Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Johann-Joachim-Becher-Weg 45, 55099 Mainz

Abb. 1 Die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s$  hängt stark von der Energieskala  $Q$  ab, an der sie gemessen wird. Mit der Gitter-QCD lässt sich diese Abhängigkeit präzise berechnen (oranges Band).



Eigenschaften gruppiert und in das Periodensystem eingeteilt wurden. In ähnlicher Weise begann man in den 1950er-Jahren, die damals bekannten Baryonen und Mesonen nach ihren Massen und Quantenzahlen zu klassifizieren.<sup>1)</sup> Wie beim Periodensystem, in dem die elektrische Ladung des Atomkerns die Position eines chemischen Elements bestimmt, lieferte die Einteilung der Hadronen nach Masse, Spin und anderen Quantenzahlen Hinweise auf ihre innere Struktur. Das von Gell-Mann, Nishijima, Ne'eman und Zweig in den frühen 1960er-Jahren entwickelte Quarkmodell erklärte alle damals bekannten Hadronen als Bindungszustände von nur drei Quarks: up, down und strange (u, d, s).<sup>2)</sup>

Ende der 1960er-Jahre wiesen Elektron-Proton-Streuexperimente in Stanford erstmals direkt auf die Existenz punktförmiger Streuzentren im Inneren des Protons hin. Etwa zur gleichen Zeit etablierten sich die Eichtheorien, um die Kräfte zwischen Materieteilchen durch den Austausch von Teilchen mit ganzzahligem Spin („Eichbosonen“) zu beschreiben. Mit diesem Konzept gelang es Fritzs, Gell-Mann und Leutwyler 1973, die Quantenchromodynamik als Eichtheorie der starken Wechselwirkung zu formulieren. Das Wort „chromo“ bezieht sich dabei auf die Eigenschaft der Quarks, eine Ladung mit drei möglichen Werten zu tragen, die metaphorisch „rot“, „grün“ und „blau“ heißen. Als Eichbosonen der QCD vermitteln die Gluonen die zwischen den Quarks wirkenden Kräfte und spielen somit eine ähnliche Rolle wie die Photonen bei der Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen Teilchen. Die QCD enthält sieben freie Parameter, die durch Messungen festgelegt werden müssen. Darunter befinden sich die Massen der sechs bekannten Quarks sowie die „starke Kopplungskonstante“, welche die Stärke der Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen festlegt. Die Kopplungskonstante der QCD lässt sich somit als Pendant zur elektrischen Ladung auffassen und wird in Anlehnung an die Feinstrukturkonstante  $\alpha$  der elektromagnetischen Wechselwirkung mit  $\alpha_s$  bezeichnet.

Die QCD besitzt zwei Eigenschaften, die ihrer mathematischen Definition nicht direkt anzusehen sind. Zunächst ist dies der empirische Befund, noch nie ein einzelnes Quark beobachtet zu haben. Daher muss ein „Mechanismus“ verhindern, dass Quarks außerhalb ihrer Bindungszustände als isolierte Teilchen existieren. Diese als Quarkeinschluss oder „Confinement“ bezeichnete Eigenschaft muss zwangsläufig eine Konsequenz der QCD sein, wenn diese eine vollständige Theorie der starken Wechselwirkung sein soll.

Die zweite wichtige Eigenschaft ist die „asymptotische Freiheit“, die einer genaueren Erklärung bedarf. Bei Eichtheorien hängt die Stärke einer Ladung stets von der Energie bzw. dem Impulsübertrag des physikalischen Prozesses ab, der zu ihrer Bestimmung herangezogen wird. So hat die Feinstrukturkonstante  $\alpha$  in der Atomphysik den Näherungswert  $1/137=0,007299\dots$ . Bei elektromagnetischen Prozessen, die sich bei sehr viel höheren Energien, z. B. bei der Masse des Z-Bosons, abspielen, ist dieser Wert ein wenig größer. In der QCD verhält sich die Kopplungsstärke genau umgekehrt: je größer die Energie, desto kleiner der Wert von  $\alpha_s$ . Im Grenzwert unendlich großer Energien sollten die Kräfte zwischen den Quarks also verschwinden (daher der Begriff „asymptotische Freiheit“). Der Wert von  $\alpha_s$  ist bei der Z-Masse mit  $\alpha_s(M_Z)=0,1184 \pm 0,0007$  schon sehr viel größer als die Feinstrukturkonstante und wächst bei kleineren Energien sogar noch an. Daher ist Störungstheorie, d. h. die Entwicklung physikalischer Observablen nach Potenzen der Kopplungskonstante, für die QCD keine gute Näherung. Besonders bei Energien, die den typischen Massen der Hadronen von 1 GeV entsprechen, ist  $\alpha_s$  von der Größenordnung eins und eine Potenzreihenentwicklung sinnlos.<sup>3)</sup> Die Energieabhängigkeit von  $\alpha_s$  ist in vielen verschiedenen Experimenten belegt und durch die QCD quantitativ beschrieben (Abb. 1).<sup>4)</sup>

### Vom Kontinuum zum Gitter

Die starke Wechselwirkung ist eine äußerst facettenreiche Fundamentalkraft. Sie ist nicht nur für die Stabilität von Kernmaterie verantwortlich, sondern spielt auch eine wesentliche Rolle in der Entwicklung des frühen Universums, etwa beim Übergang von einem plasmaartigen Materiezustand, in dem das Confinement der Quarks aufgehoben ist, zur Phase der hadronischen Materie, wie wir sie heute im Labor beobachten. Auch für die Frage, wie sich eine Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie im frühen Universum ausbilden konnte, ist die starke Wechselwirkung essenziell. Möchte man diese und weitere Phänomene verstehen, so ist angesichts der Überlegungen im letzten Abschnitt ein theoretischer Zugang zur QCD nötig, der über die Störungstheorie hinausgeht.

Bereits ein Jahr nach der Veröffentlichung von Fritzs, Gell-Mann und Leutwyler erschien eine bahnbrechende Arbeit für das theoretische Verständnis der QCD und der starken Wechselwirkung insgesamt

1) Dabei unterscheidet man zwischen den Baryonen (mit halbzahligen Spin) und den Mesonen (mit ganzzahligen Spin), die zusammen die Hadronen bilden.

2) Das heutige Standardmodell enthält noch drei weitere Quarks: charm, bottom und top.

3) Da Einheiten mit  $c = k_B = 1$  gewählt wurden, sind Massen, Impulse und Temperaturen in MeV angegeben.

4) Zur QCD siehe auch die Übersichtsartikel in Physik Journal, Februar 2012, S. 31 sowie April 2012, S. 45.

[2]. Ken Wilson hatte einen Zusammenhang zwischen der QCD und der statistischen Physik hergestellt, der die Berechnung physikalischer Observablen erlauben sollte – unabhängig von der konventionellen Störungstheorie. Der Ausgangspunkt hierfür war die Pfadintegralmethode von Feynman, mit der sich quantentheoretische Erwartungswerte physikalischer Observable berechnen lassen, indem man über alle möglichen klassischen Trajektorien eines Teilchens summiert. Das Pfadintegral lässt sich auf Feldtheorien anwenden, indem man nicht über Teilchenpfade integriert, sondern über alle Werte, die die Feldkomponenten an jedem Punkt  $x$  der Raumzeit annehmen können. Wie in der Quantenmechanik tritt dabei im Integrand ein komplexer und oszillierender Faktor  $\exp(iS)$  auf mit der klassischen Wirkung  $S$  des Systems. Das Pfadintegral ist also ein unendlichdimensionales Integral über eine oszillierende Funktion.

Wilsons Ansatz bestand darin, das Raum-Zeit-Kontinuum durch eine diskrete und endliche Punktmenge, ähnlich einem Kristallgitter, zu ersetzen. Dadurch enthält die Theorie endlich viele Freiheitsgrade und das Pfadintegral ist endlichdimensional. Das zweite wesentliche Element dieses Zugangs war der Übergang von der aus der Relativitätstheorie bekannten Minkowski-Metrik zu einer euklidischen Metrik, in der sich Raum- und Zeitkoordinaten formal nicht mehr unterscheiden. Dadurch wird der Beitrag der klassischen Wirkung im Integranden zu  $\exp(-S)$ , sodass keine Oszillationen mehr auftreten. Mit diesen Überlegungen erhielt Wilson einen endlichen und mathematisch wohldefinierten Ausdruck für das Pfadintegral  $Z$  der QCD:

$$Z = \int \prod_x \prod_{\mu=0}^3 dU_{\mu}(x) \exp(-S_{\text{eff}}[U]).$$

Hierbei bezeichnet  $U_{\mu}(x)$  das Eichfeld (Gluonfeld) am Gitterpunkt  $x$  und für die Raum-Zeit-Komponente  $\mu$ . Die Beiträge der Quark- und Antiquarkfelder sind in die effektive Wirkung der QCD,  $S_{\text{eff}}[U]$ , absorbiert worden, die daher nur noch von den Eichfeldern  $U_{\mu}(x)$  abhängt. Der Faktor  $\exp(-S_{\text{eff}}[U])$  ordnet dabei jeder Eichkonfiguration einen Zahlenwert zu. Offensichtlich dominieren diejenigen Eichkonfigurationen im Pfadintegral, für die  $S_{\text{eff}}[U]$  nahe seines Minimums liegt. Diese Beobachtung verdeutlicht den Zusammenhang zwischen dem euklidischen Pfadintegral  $Z$  und der Zustandssumme eines Systems der statistischen Physik. Der „Boltzmann-Faktor“  $\exp(-S_{\text{eff}}[U])$  lässt sich als das statistische Gewicht einer Eichkonfiguration interpretieren. Somit ergibt sich eine mathematische Äquivalenz zwischen einer Observablen der Quantenfeldtheorie und dem thermodynamischen Erwartungswert einer Größe in der statistischen Physik. Dies erlaubt es, auf die Rechenmethoden der statistischen Physik zurückgreifen, um Probleme der starken Wechselwirkung anzugehen, ohne auf eine schwache Kopplung angewiesen zu sein. Insbesondere lassen sich die in der Physik der kondensierten Materie so erfolgreichen Monte-Carlo-Simulationen anwenden. In der Gitter-QCD wird das euklidische Pfadintegral ausgewertet,

indem man ein Ensemble von Eichkonfigurationen mit Hilfe eines stochastischen Markov-Prozesses erzeugt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Eichkonfiguration im Ensemble enthalten ist, bemisst sich dabei durch ihr statistisches Gewicht  $\exp(-S_{\text{eff}}[U])$  [3–5].

In seinem grundlegenden Artikel hatte Wilson zudem ein Kriterium formuliert, mit dem man entscheiden kann, ob in einer Eichtheorie die Ladungen der Materieteilchen für einen äußeren Beobachter komplett abgeschirmt sind. Damit lässt sich das Confinement der Quarks erklären: Ist die starke Ladung keine beobachtbare Größe, können die Träger dieser Ladung auch nicht als freie Teilchen existieren, sondern nur als gebundene Zustände, in denen sich die Ladungen der Konstituenten kompensieren – wie ein Atom nach außen hin elektrisch neutral ist, obwohl Kern und Elektronenhülle entgegengesetzte Ladung aufweisen. Mithilfe der auch von Wilson vorangetriebenen Monte-Carlo-Simulationen fand Michael Creutz Ende der 1970er-Jahre erste Hinweise darauf, dass das Confinement tatsächlich eine Konsequenz der QCD ist. Nach diesem Startschuss machten sich viele Theoretiker an die Arbeit, um eine Vielzahl hadronischer Eigenschaften mittels numerischer Simulationen zu berechnen. Dabei galt das Interesse besonders ersten Vorhersagen für die Massen neuartiger Hadronen wie den „Gluonenbällen“, die im Rahmen des Quarkmodells nicht existieren können, wohl aber in der QCD.

Es entbehrt nicht einer gewissen Ironie, dass ausgerechnet Wilson selbst die Gemeinde der „Gitter-Physiker“ mit einer sehr pessimistischen Einschätzung („None of my ideas have led anywhere“) irritiert hat. Während der Konferenz über Gitterfeldtheorie „Lattice 1989“ kündigte er an, sich aus der Gitter-QCD zurückzuziehen, um künftig über Quantenchemie zu arbeiten. Seinen Ausstieg begründete er mit dem enormen Rechenaufwand, der nötig sei, um Voraussagen für Experimente der Teilchenphysik machen zu können [6]: „I still believe that an extraordinary increase in computer power ( $10^8$  is, I think, not enough) and equally powerful algorithmic advances will be necessary before a full interaction with experiment takes place.“ Legt man den von Wilson genannten Faktor und die Rechenleistung der 1989 verfügbaren Supercomputer zugrunde, so müsste eine Maschine mindestens  $10^{18}$  Rechenoperationen pro Sekunde erreichen („Exa-Flop“), bevor die Gitter-QCD relevante Aussagen für das Zusammenspiel mit dem Experiment machen könnte. Dies ist immer noch hundertmal mehr als die Leistung derjenigen Rechner, die aktuell an der Spitze der weltweit 500 schnellsten Computer stehen. Wie wir sehen werden, war Wilsons Einschätzung jedoch zu pessimistisch.

### Hadronspektrum und Flavour-Physik

Lässt sich mit der Gitter-QCD die Masse des Protons präzise vorhersagen? Diese Größe ist von ähnlicher Bedeutung für die QCD wie die Bindungsenergie des Wasserstoffatoms für die Quantenmechanik. Die

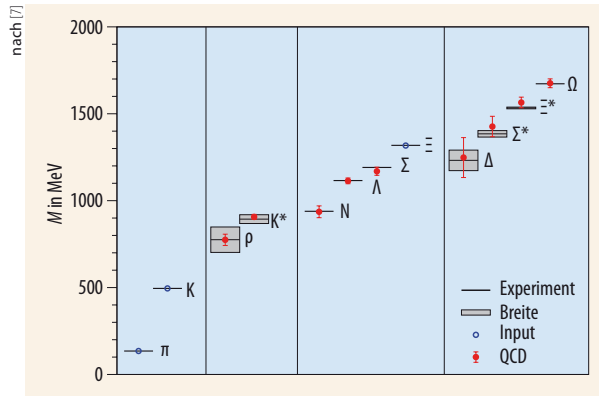


Abb. 2 Die mit der Gitter-QCD berechneten Massen der leichtesten Mesonen und Baryonen (rot) stimmen gut mit den gemessenen Massen (schwarze Linien; graue Bänder: Zerfallsbreiten) überein. Die blau markierten Zustände sind Input-Größen und dienen der Kalibration der Gitter-Berechnung (siehe Text).

korrekte Reproduktion des beobachteten Massenspektrums der Hadronen hat sich als „Benchmark“ der Theorie entwickelt, das den jeweiligen Entwicklungsstand der Gitter-QCD gut verdeutlicht. Seit den frühen 1990er-Jahren haben sich immer wieder verschiedene Kollaborationen an diesem Problem versucht und inzwischen eine Genauigkeit im Prozentbereich erreicht (Abb. 2). Dies ist nicht nur als Erfolg der Gitter-QCD zu werten, sondern bestätigt eindrucksvoll die Gültigkeit der QCD als Eichtheorie der starken Wechselwirkung.

Um Gitterresultate mit dem Experiment vergleichen zu können, muss man die Rechnungen bei den physikalischen Werten der Quarkmassen durchführen. Da Quarks nicht als freie Teilchen existieren, lässt sich ihre Masse jedoch nicht experimentell bestimmen. Die Werte der QCD-Parameter, die der physikalischen Situation entsprechen, sind also *a priori* gar nicht bekannt. Daher variiert man die Quarkmassen so lange, bis die Masse eines Mesons oder Baryons, das aus den entsprechenden Quarks aufgebaut ist, mit dem experimentellen Wert übereinstimmt. Diese Hadronmassen sind somit Input-Größen für die Simulation. Die gezeigte Rechnung (Abb. 2) wurde mit dynamischen up-, down- und strange-Quarks durchgeführt, mit entarteten Massen  $m_u = m_d = m_s = m_c$ . Zur Festlegung von  $m_c$  sowie der strange-Quarkmasse  $m_s$  dienen die Massen des Pions und des K-Mesons als Input-Größen. Zudem wurden sämtliche dimensionsbehafteten Größen in Einheiten einer weiteren, experimentell bekannten Hadronmasse bestimmt, im vorliegenden Fall die des  $\Xi$ -Baryons. Während also die Massen  $m_\pi$ ,  $m_K$  und  $m_\Xi$  der Kalibration der Gitterrechnung dienen, sind alle anderen Massen und sonstigen mit den erzeugten Eichkonfigurationen berechneten Größen Voraussagen der QCD.

Ein Gebiet der Teilchenphysik, das mehr und mehr auf Gitterrechnungen zurückgreift, ist die Flavour-Physik. Zu den wichtigsten Zielen gehört dabei, das Ungleichgewicht zwischen Materie und Antimaterie zu verstehen und nach Abweichungen vom Standardmodell zu suchen. Beides setzt voraus, die Elemente der nach Cabibbo, Kobayashi und Maskawa benann-

ten CKM-Matrix genau zu kennen. Hierzu existiert seit vielen Jahren ein umfangreiches Forschungsprogramm, das Experimente an den B-Meson-Fabriken BaBar und Belle, am Tevatron und am LHC, aber auch an  $e^+e^-$ -Beschleunigern (KLOE, BES) umfasst. Diese sind alle darauf spezialisiert, die Zerfallsraten bestimmter Mesonsorten mit höchster Genauigkeit zu vermessen. Bei den entsprechenden Prozessen, hervorgerufen durch die elektroschwache Wechselwirkung, ändert sich die Flavour-Quantenzahl. So kann ein strange-Quark in das leichtere up-Quark übergehen. Die CKM-Matrix beschreibt dabei die relativen Beiträge der verschiedenen Flavour-Übergänge. Um ihre Elemente zu bestimmen, muss man die experimentellen Zerfallsraten mit den entsprechenden Ausdrücken der Theorie vergleichen. Aufgrund des Confinements geht das nur auf dem Niveau der Bindungszustände der beteiligten Quarks, also der Mesonen. Die Gitter-QCD ermöglicht es dabei, die Beiträge der starken Wechselwirkung zu elektroschwachen Zerfallsprozessen zu berechnen, die sich in den mesonischen Zerfallskonstanten und Formfaktoren wiederfinden.

Ein konkretes Beispiel für die Bedeutung der Gitter-QCD ist die Frage, ob die CKM-Matrix, wie vom Standardmodell vorhergesagt, unitär ist. Ihre Elemente müssen dann eine Reihe von Unitaritätsbedingungen erfüllen. Eine davon verknüpft die Übergänge eines d-, s- oder b-Quarks in ein u-Quark und lautet  $|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1$ . Ist diese Bedingung im Rahmen der experimentellen und theoretischen Unsicherheiten nicht erfüllt, steht die Gültigkeit des Standardmodells infrage.<sup>5)</sup>

Aus den gemessenen Zerfallsraten lässt sich nur die Kombination  $|V_{us}|f_K / |V_{ud}|f_\pi$  der CKM-Matrixelemente und der mesonischen Zerfallskonstanten  $f_K$  und  $f_\pi$  gewinnen. Ebenso erhält man das Produkt  $|V_{us}|f_+$ , wobei  $f_+$  den Formfaktor für den Zerfall eines K-Mesons in ein Pion und ein Lepton-Paar bezeichnet. Mit den derzeit besten Werte für  $f_+$  und  $f_K/f_\pi$  aus der Gitter-QCD [8] lassen sich die Größen  $|V_{us}|/|V_{ud}|$  und  $|V_{ud}|$  bestimmen und die beiden CKM-Matrixelemente gegeneinander auftragen (Abb. 3). Aus dem Schnittpunkt der Bänder ergibt sich dann der erlaubte Bereich für  $|V_{ud}|$  und  $|V_{us}|$ . Übersetzt man die Ellipse um den Schnittpunkt in die Unitaritätsbedingung, so ergibt sich  $|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1,002 \pm 0,015$ , sodass die Unitarität mit einer Genauigkeit im Prozentbereich bestätigt ist. Die Präzision dieses Tests lässt sich noch erheblich steigern, indem man eine der beiden auf dem Gitter berechneten Größen durch eine weitere Messung ersetzt. So ergibt sich der Wert von  $|V_{ud}|$  sehr genau aus dem radioaktiven  $\beta$ -Zerfall einer Reihe von Kernen. Für den Unitaritätstest reicht nun eine der beiden Größen,  $f_+$  oder  $f_K/f_\pi$ . Entscheidet man sich für  $f_K/f_\pi$ , so folgt  $|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 0,9999 \pm 0,0006$ . Dieses Beispiel zeigt, dass es möglich ist, das Standardmodell mit einer Genauigkeit im Promillebereich zu testen, ausschließlich unter Verwendung von Messdaten und einer ab-initio-Methode für die starke Wechselwirkung.

5) Bei der derzeit möglichen Genauigkeit ist das Element  $|V_{ub}|$  zu klein, um diesen Test zu beeinflussen, und kann daher vorerst vernachlässigt werden.

## Neue Herausforderungen

Ungeachtet aller Erfolge der Gitter-QCD in den letzten vierzig Jahren, sind keinesfalls alle Probleme der starken Wechselwirkung gelöst. Wo sind die offenen Fragen und aktuellen Herausforderungen?

Wie wir gesehen haben, gibt die QCD die Massen der Grundzustände von Mesonen und Baryonen korrekt wieder. Doch wie es im Wasserstoffatom neben der Energie des Grundzustands auch angeregte Zustände gibt, so existieren auch in der starken Wechselwirkung Anregungszustände des Protons und seiner Verwandten, die so genannten Baryonresonanzen. Die Energien solcher Anregungszustände zu berechnen, ist weitaus schwieriger als die entsprechende Rechnung für den Grundzustand, da letzterer die mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode auszuwertende Observable bei weitem dominiert. Die Beiträge der Anregungszustände sind relativ zum Grundzustand exponentiell unterdrückt, sodass aufwändige numerische Verfahren nötig sind, um diese herauszufiltern. Obgleich einige Erfolge erzielt wurden, ist bis dato keine vollständig befriedigende Berechnung des Spektrums der Baryonresonanzen gelungen. Im Übrigen gehört zu einer vollständigen Charakterisierung einer Teilchenresonanz neben der Energie auch die Breite, d. h. eine gewisse Energieunschärfe, ähnlich der natürlichen Linienbreite von Spektrallinien in der Atomphysik. Die Breite einer mesonischen oder baryonischen Resonanz sollte sich ebenso aus der QCD ergeben, ihre Berechnung ist aber äußerst anspruchsvoll. Zwar hat Martin Lüscher schon vor vielen Jahren einen eleganten Formalismus hierfür entwickelt [9], doch ist dessen Umsetzung mit vielen technischen Problemen behaftet, sodass eine vollständige Charakterisierung von Hadron-Resonanzen nur in den einfachsten Fällen gelungen ist.

Eine weitere wichtige Größe, welche die Gültigkeit des Standardmodells auf die Probe stellt, ist das anomale magnetische Moment des Myons. Das Myon, das die gleichen Eigenschaften wie das rund 200-mal leichtere Elektron besitzt, koppelt mit einer bestimmten Stärke an ein äußeres Magnetfeld, die durch das Verhältnis zwischen dem magnetischen Moment und dem Bohrschen Magneton des Myons definiert und als  $g$ -Faktor bezeichnet wird. Aufgrund von Quanteneffekten ergeben sich kleine Abweichungen vom Wert  $g=2$ , den die relativistische Quantenmechanik vorausagt. Diese Abweichung, das anomale magnetische Moment  $a_\mu = (g-2)_\mu/2$ , wurde in Experimenten an Speicherringen mit außerordentlich hoher Genauigkeit gemessen. Daneben existiert eine gleichermaßen präzise theoretische Vorhersage im Rahmen des Standardmodells, die sich jedoch um etwas mehr als drei Standardabweichungen vom experimentellen Ergebnis unterscheidet. Ob dies ein Hinweis auf Physik jenseits des Standardmodells sein könnte, hängt unter anderem davon ab, ob die zitierte Unsicherheit der theoretischen Vorhersage richtig abgeschätzt wurde. Obwohl 99,994 % des Werts von  $a_\mu$  auf das Konto der elektromagnetischen Wechselwirkung gehen, spielt aufgrund

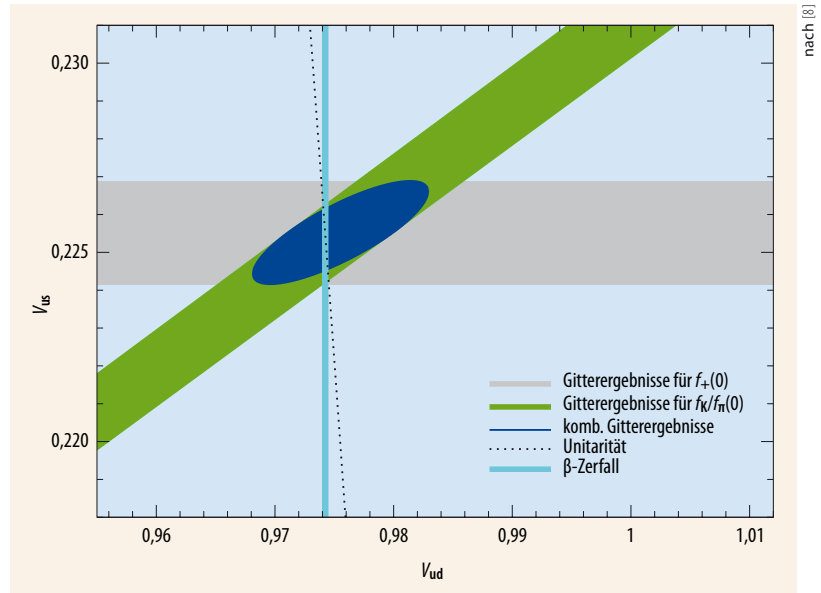


Abb. 3 Die experimentellen Daten und Resultate der Gitter-QCD schränken die CKM-Matrixelemente  $|V_{ud}|$  und  $|V_{us}|$  ebenso ein wie die direkte Bestimmung von  $|V_{ud}|$  aus dem nuklearen  $\beta$ -Zerfall (hellblaue Linie). Die Matrixelemente müssen der Unitaritätsbedingung genügen (punktierte Linie).

der hohen Messgenauigkeit die starke Wechselwirkung eine entscheidende Rolle. Die Beiträge der hadronischen Vakuumpolarisation und der hadronischen Licht-Licht-Streuung (Abb. 4) sind einer störungstheoretischen Behandlung nicht zugänglich und müssen teilweise durch Modelle abgeschätzt werden. In den letzten Jahren gab es daher viele Versuche, diese Größen mit Hilfe der Gitter-QCD zu berechnen. Leider sind die bisher publizierten Ergebnisse noch zu ungenau, um die Frage nach neuer Physik entscheidend zu beeinflussen. Vor Kurzem sind jedoch einige wichtige technische Verbesserungen gelungen, die es erlauben sollten, die Genauigkeit in den nächsten fünf bis zehn Jahren erheblich zu steigern. Da in diesem Zeitraum auch ein Nachfolgeexperiment zur direkten Messung von  $a_\mu$  aufgebaut wird, bleibt zu hoffen, dass man auf dieser Zeitskala von „full interaction with experiment“ sprechen kann, was diese wichtige Größe betrifft.

Die Frage nach den Eigenschaften von Materie bei extrem hohen Temperaturen, wie sie im frühen Universum herrschten, ist ein weiterer großer Themenkomplex der Teilchen- und Kernphysik. Gleichmaßen interessiert man sich für Systeme mit extrem hohen Teilchendichten wie im Inneren von

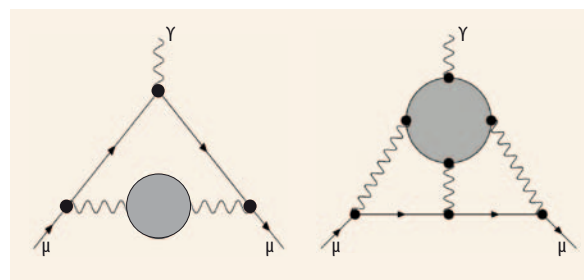


Abb. 4 Zum anomalen magnetischen Moment des Myons trägt die hadronische Vakuumpolarisation (links) ebenso bei wie die hadronische Licht-Licht-Streuung (rechts). Die grauen Kreise repräsentieren die Beiträge der QCD.

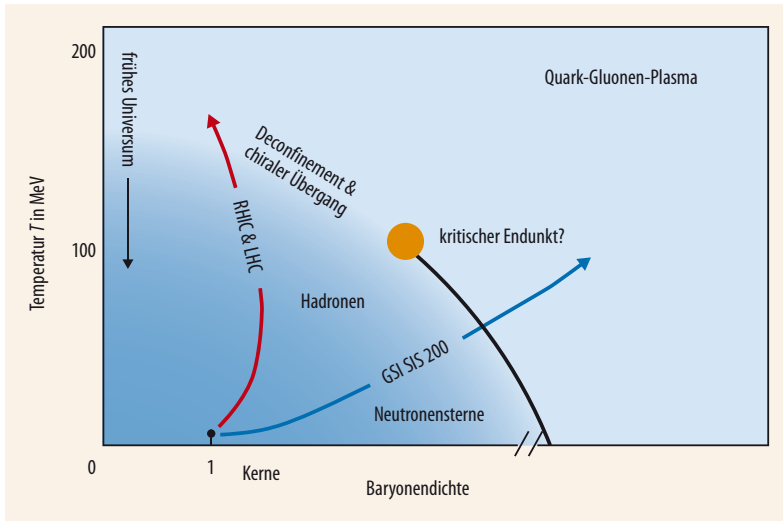


Abb. 5 Im Phasendiagramm der QCD erwartet man bei großer Teilchendichte einen Phasenübergang erster Ordnung zwischen der hadronischen Phase und dem Quark-Gluon-Plasma. Bei geringen

Dichten findet dagegen kein echter Phasenübergang statt, sondern ein „Crossover“, bei dem hadronische Materie langsam in die Plasmaphase übergeht.

Neutronensternen. Unter diesen extremen Bedingungen erwartet man, dass das Quark-Confinement aufgehoben ist. Oberhalb bestimmter kritischer Werte von Temperatur und Dichte sollte demnach ein Übergang von der Phase der hadronischen Materie in einen plasmaartigen Zustand von Quarks und Gluonen stattfinden. Die diversen Erscheinungsformen der Materie lassen sich in einem Phasendiagramm – analog zu den Phasen und Aggregatzuständen von Wasser – zusammenfassen (Abb. 5). Dazu hat die Gitter-QCD einige wichtige Beiträge leisten können. Entsprechende Simulationen bei nahezu verschwindender Baryonendichte haben gezeigt, dass die Temperatur des Übergangs von der hadronischen Phase zum Quark-Gluon-Plasma bei rund 150 MeV liegt, was  $1,7 \cdot 10^{12}$  Kelvin oder dem 100 000-fachen der Temperatur des Sonneninneren entspricht. Auch die Zustandsgleichung für stark wechselwirkende Materie, die den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und Energiedichte beschreibt, ist mit den Methoden der Gitter-QCD sehr genau bestimmt worden [10]. Hieraus lassen sich Erkenntnisse für die Entwicklung im frühen Universum oder für die Interpretation der Schwerionenexperimente am LHC oder am RHIC in den USA gewinnen.

Die Untersuchung des Phasendiagramms für große Werte der Baryonendichte stellt die Gitter-QCD jedoch vor eine immense Herausforderung. Entsprechende Experimente sollen künftig am SIS-100-Beschleuniger der FAIR-Anlage in Darmstadt stattfinden (Abb. 5). Um ein stark wechselwirkendes System mit nicht-verschwindender Baryonendichte im Rahmen der Gitter-QCD zu beschreiben, muss die Wirkung  $S_{\text{eff}}[U]$  im Pfadintegral um den Teilchenzahloperator ergänzt werden. Das macht  $\exp(-S_{\text{eff}}[U])$  zu einer komplexen Zahl, die sich nicht mehr als statistisches Gewicht einer Konfiguration von Eichfeldern interpretieren lässt. Damit ist der Monte-Carlo-Methode ihre eigentliche Grundlage entzogen. An der Lösung dieses Problems

wird derzeit intensiv gearbeitet, und obwohl einige Erfolge gelungen sind, bleibt die Untersuchung von Systemen mit nicht-verschwindender Baryonendichte ein großes Problem. Bei allen Schwierigkeiten hat die Gitter-QCD jedoch wertvolle Hinweise für die aktuellen Experimente in der Schwerionenphysik geliefert, die sich mit der Untersuchung des Phasendiagramms der QCD befassen.

## Rechenpower fürs Gitter

In Wilsons Einschätzung von 1989 ist von einer ungeheuren Steigerung der Rechenleistung um einen Faktor  $10^8$  die Rede. Tatsächlich sind die heutigen Supercomputer „nur“  $10^5$ - bis  $10^6$ -mal schneller als vor fast 25 Jahren. Auch ohne echte Revolution bei der Algorithmenentwicklung haben viele Verbesserungen den seit 1987 verwendeten „Hybrid Monte Carlo“-Algorithmus zur Erzeugung von Eichkonfigurationen derart beschleunigt, dass die Gitter-QCD standardmäßig wichtige Beiträge für die Phänomenologie der starken Wechselwirkung leistet. Der enorme Rechenbedarf hat selbst die schnellsten verfügbaren Supercomputer an die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit gebracht. Dabei sind die typischen Operationen oft verblüffend einfach, wie die Multiplikation eines Vektors mit einer dünn besetzten Matrix. Was die Simulation so verteuert, ist die Tatsache, dass die physikalisch relevanten Werte der QCD-Parameter (Quarkmassen und Kopplungskonstante) die Zahl der elementaren Markov-Schritte und gleichzeitig die globale Systemgröße in die Höhe treiben.

Vom Standpunkt der Informatik und Hardware-Entwicklung aus gesehen eignet sich die Gitter-QCD sehr gut für die Implementierung auf massiv parallelen Rechnern. Seit den 1980er-Jahren haben daher mehrere Gruppen von Gitter-Physikern für ihre eigenen Zwecke optimierten Parallelrechner entworfen und gebaut. In Italien entstanden auf Anregung des Theoretikers Niccolò Cabibbo, einem der Namensgeber der CKM-Matrix, die „APE“-Rechner. In den USA entwickelte die Gruppe um Norman Christ an der Columbia



Abb. 6 Der Supercomputer QPACE (QCD Parallel Computing on the Cell) wurde an der Universität Regensburg speziell für QCD-Simulationen entwickelt.

University eine Serie von Gitter-Rechnern, deren letzte Entwicklungsstufe als Vorläufer und Prototyp für die heutigen BlueGene-Rechner angesehen werden kann, die auch das Forschungszentrum Jülich betreibt. In Deutschland hat sich die Universität Regensburg unter Führung von Tilo Wettig als Vorreiter für Eigenentwicklungen etabliert (Abb. 6). Daneben kommen nach wie vor Supercomputer zum Einsatz sowie Massiv-Parallelrechner auf Basis von Server-Hardware mit schnellem Netzwerk. Außerdem haben sich Grafikprozessoren zu einer kostengünstigen Alternative entwickelt.

**Fazit**

Während in früheren Jahren die Validierung der QCD als Eichtheorie der starken Wechselwirkung im Fokus stand, verschiebt sich die Anwendung der Gitter-QCD immer weiter in den Bereich der Präzisionstests des Standardmodells. Auch zum Verständnis der Eigenschaften von leichten Atomkernen werden Gittermethoden immer häufiger eingesetzt. Neben der Behandlung der vielfältigen Phänomene der starken Wechselwirkung im Rahmen einer ab-initio-Methode hat sich die Gitter-QCD auch als Triebkraft für die Entwicklung von Computer-Hardware erwiesen (einen umfassenden Überblick zum Stand der Forschung bietet [11]). Der Anwendungsbereich der Gitter-QCD hat sich 30 Jahre nach ihrer Formulierung in einem Ausmaß entwickelt, das selbst die Vorstellungskraft ihres Begründers gesprengt hätte.

**Literatur**

- [1] J. Beringer et al. [Particle Data Group Collaboration], Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012)
- [2] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974)
- [3] I. Montvay und G. Münster, Quantum Fields on a Lattice, Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- [4] H. Wittig, QCD on the Lattice, in: Landolt-Boernstein I/21A: Elementary particles, 5, Springer-Verlag (Heidelberg)
- [5] C. Gattringer und C.B. Lang, Quantum Chromodynamics on the Lattice, Lect. Notes Phys. **788**, 1 (2010)
- [6] K. G. Wilson, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **17**, 82 (1990)
- [7] S. Dürr et al., Science **322**, 1224 (2008); vgl. Physik Journal, Januar 2009, S. 16
- [8] G. Colangelo et al., Eur. Phys. J. C **71**, 1695 (2011)
- [9] M. Lüscher, Nucl. Phys. B **364**, 237 (1991)
- [10] O. Philipsen, Prog. Part. Nucl. Phys. **70**, 55 (2013)
- [11] www.lattice2013.uni-mainz.de

**DER AUTOR**

**Hartmut Wittig** studierte Physik in Mainz und Oxford und promovierte 1992 in Hamburg mit einer Arbeit zum Higgs-Boson unter Verwendung der Gitterfeldtheorie. Nach Forschungsaufenthalten in Southampton, DESY-Zeuthen, Oxford und am CERN ging er 2001 als permanenter Wissenschaftler ans DESY in Hamburg. 2005 erhielt er einen Ruf auf eine W3-Professur für Theoretische Physik an der Universität Mainz. Seine Forschungsschwerpunkte sind Gitterrechnungen zur Hadronstruktur, Flavour-Physik und zum anomalen magnetischen Moment des Myons. Seit 2012 ist er einer der Sprecher des Exzellenzclusters PRISMA.



Einstein läßt grüßen

RAY D'INVERNO

Einführung in die Relativitätstheorie

2., durchgesehene Aufl.



ISBN: 978-3-527-40912-9

2009 585 S. mit ca. 236 Abb. Broschur

€ 39,90

Das Buch umfaßt die Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie. Innerhalb der allgemeinen Theorie werden Schwarze Löcher, Gravitationswellen und Kosmologie besonders ausführlich behandelt. Mathematische Hilfsmittel wie der Tensor-Formalismus werden vollständig entwickelt. Eine Vielzahl von Übungsaufgaben mit Lösungen bietet dem Leser die Möglichkeit zur Vertiefung und zur Selbstkontrolle.

Der lebendige Stil, gewürzt mit englischem Humor, erleichtert das Lesen anspruchsvoller Passagen und öffnet das geistige Auge für die klassische Schönheit dieser grundlegenden Theorie. Durch das exzellente und überaus reichhaltige Bildmaterial werden selbst komplizierte Sachverhalte einsichtig.

Wiley-VCH • Postfach 10 11 61 • D-69451 Weinheim  
Tel. +49 (0) 62 01-60 64 00 • Fax +49 (0) 62 01-60 61 84  
E-mail: service@wiley-vch.de

Irrtum und Preisänderungen vorbehalten • Stand der Daten: 12/2012

Besuchen Sie uns unter [www.wiley-vch.de](http://www.wiley-vch.de)