

# Simuliertes Verschmelzen

Mit Hilfe numerischer Methoden lassen sich heutzutage Phänomene und Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie genau erkunden.

Thomas W. Baumgarte

Rechtzeitig zum hundertsten Geburtstag der Allgemeinen Relativitätstheorie hat ihre numerische Behandlung enorme Fortschritte gemacht. Mit neuen Methoden ist es jetzt möglich, Szenarien zu simulieren, die mit analytischen Methoden unzugänglich sind – zum Beispiel die Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher.

Kurz zusammengefasst beschreibt die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) Gravitation mit Hilfe der Krümmung der Raumzeit. Oder, wie John Wheeler es eloquent beschrieben hat, „Matter tells spacetime how to curve, and curved spacetime tells matter how to move.“ Mathematisch ist dies ausgedrückt in der Einsteinschen Feldgleichung<sup>1)</sup>

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (1)$$

deren hundertsten Geburtstag wir dieses Jahr feiern. Leider ist dieses Juwel einer Gleichung für Nichtspezialisten etwas unzugänglich. Für den Rahmen dieses Artikels müssen wir sie aber zum Glück nicht im Detail verstehen. Stattdessen vergleichen wir sie mit ihrem Newtonschen Cousin, der Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (2)$$

Auf den ersten Blick scheinen die beiden Gleichungen nicht viel gemeinsam zu haben (genau genommen nur  $\pi$  und  $G$ ), aber sie sind tatsächlich eng verwandt. Die Dichte  $\rho$  spielt die Rolle einer Quelle auf der rechten Seite der Poisson-Gleichung (2); in der Einstein-Gleichung (1) wird die Dichte ausgedrückt durch den Energie-Impuls-Tensor  $T_{ab}$ . Auf der linken Seite der Poisson-Gleichung ist der Laplace-Operator  $\nabla^2$  eine Abkürzung für zweite (räumliche) Ableitungen des Gravitationspotentials  $\phi$ , dem fundamentalen Objekt in der Newtonschen Gravitationstheorie. Das fundamentale Objekt in der ART ist die Raumzeit-Metrik  $g_{ab}$ , und tatsächlich befinden sich zweite Ableitungen der Metrik auf der linken Seite der Feldgleichung (1) – diese sind allerdings gut versteckt im Einstein-Tensor  $G_{ab}$ .

Die Metrik gibt Koordinaten physikalischen Sinn und beschreibt die Krümmung der Raumzeit. Koordinaten haben a priori keinerlei physikalische Bedeutung und dienen nur der Lokalisierung in Raum und Zeit. Hausnummern beispielsweise sind geläufige Koordinaten entlang einer Straße; offensichtlich hat die Differenz der Hausnummern zweier Nachbarn (oft 2) aber

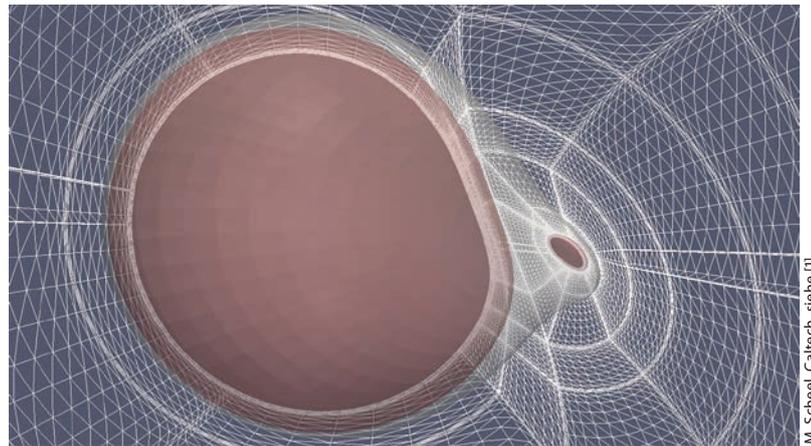


Abb. 1 Die numerische Behandlung zweier sich umkreisender Schwarzer Löcher wird durch so genannte adaptive Gitter und durch das „Ausschneiden“ der Singularität („Excision“-Methode)

möglich. Man sieht hier, dass die numerischen Gitter nur eine gewisse Distanz in die Ereignishorizonte der Schwarzen Löcher (gekennzeichnet durch die braunen Oberflächen) eindringen.

nichts mit der physikalischen Entfernung zwischen den Häusern zu tun. Die Metrik übersetzt die Differenz zwischen Koordinaten in physikalische Abstände. Wenn wir physikalische Abstände messen können, können wir auch Krümmungen messen. Auf einer Kugeloberfläche zum Beispiel können wir den Umfang  $C$  eines Breitengrades bestimmen und auch den Abstand  $R$  dieses Breitengrades vom Nordpol. Wir stellen fest, dass  $C < 2\pi R$  ist – ein klares Zeichen, dass der Raum nicht euklidisch, sondern gekrümmt ist.

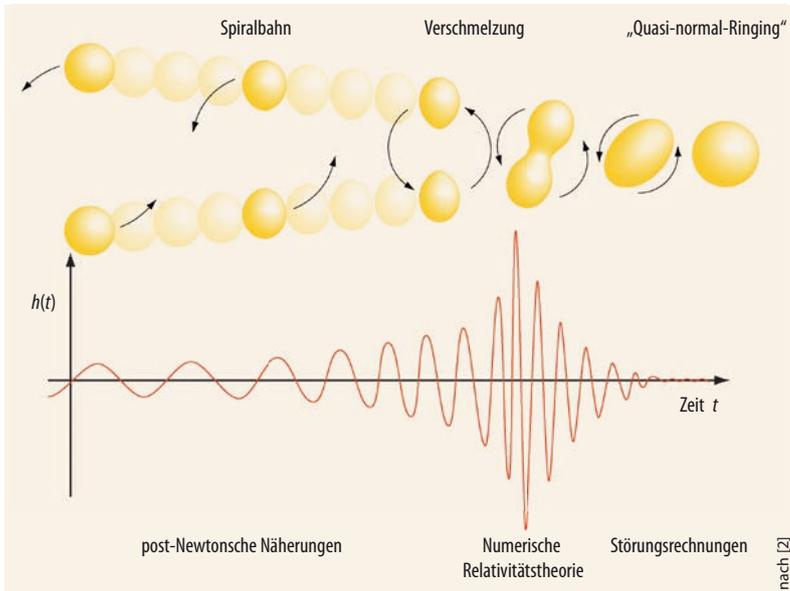
Wenn wir ein Newtonsches Gravitationsproblem lösen, suchen wir nach dem Gravitationspotential  $\phi$ ; in der ART hingegen suchen wir nach der

1) Eigentlich sollten wir auch die kosmologische Konstante  $\Lambda$  einführen (siehe die Einleitung von M. Bartelmann). Für die Prozesse, die wir in diesem Artikel besprechen, sind die Effekte der kosmologischen Konstanten jedoch vernachlässigbar.

## KOMPAKT

- Zwei wichtige Lösungen der Einstein-Gleichungen sind Gravitationswellen und Schwarze Löcher. Beide haben kein Äquivalent in der Newtonschen Gravitationstheorie.
- Isolierte Schwarze Löcher lassen sich analytisch mathematisch berechnen. Binärsysteme von Schwarzen Löchern, die sich umkreisen und dabei Gravitationswellen aussenden, erfordern numerische Näherungsverfahren.
- Schwierigkeiten bei der Simulation bereitet die Raumzeitsingularität im Zentrum eines Schwarzen Lochs.
- Inzwischen ist es gelungen, das Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher und die Veränderung des Gravitationswellensignals bei diesem Prozess zu simulieren.

Prof. Dr. Thomas W. Baumgarte, Department of Physics and Astronomy, Bowdoin College, 8800 College Station, Brunswick, ME 04011, USA



**Abb. 2** Für großen Bahnabstand lässt sich das Binärsystem zweier verschmelzender Schwarzer Löcher mithilfe von Post-Newtonischen Näherungsrechnungen approximieren, während das „Quasi-normal-Ringing“ des Überrestes der Verschmelzung als Störung eines isolierten Schwarzen Loches näherungsweise zu beschreiben ist. Beide Näherungsverfahren führen jedoch zu großen Fehlern für die Verschmelzung selbst, die sich daher nur mithilfe von numerischen Simulationen berechnen lässt.

Raumzeit-Metrik  $g_{ab}$ . Manche Lösungen der Einstein-Gleichungen haben ein Newtonsches Äquivalent, aber manche Lösungen sind auch qualitativ neu oder führen zu qualitativ neuen Phänomenen. Zwei Arten solcher Lösungen, die eine besonders wichtige Rolle für diesen Artikel spielen, sind Gravitationswellen und Schwarze Löcher. Beide sind Vakuumlösungen, sodass wir die Dichten  $T_{ab}$  (oder  $\rho$ ) ignorieren können.

Wie relativ leicht zu erkennen ist, sollte man wellenartige Lösungen in einer relativistischen Gravitationstheorie erwarten. Zum Beispiel könnten wir versuchen, aus der Poisson-Gleichung eine relativistische Feldgleichung zu konstruieren – zumindest sollte diese Gleichung invariant unter Lorentz-Transformationen sein, was eine gewisse Symmetrie zwischen Raum und Zeit verlangt. Das gilt nicht für die Poisson-Gleichung, denn der Laplace-Operator besteht nur aus räumlichen Ableitungen. Um die Symmetrie zwischen Raum und Zeit wieder herzustellen, könnten wir eine zweite zeitliche Ableitung einführen – dadurch finden wir eine Wellengleichung der Form

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \phi = 4\pi G \rho, \quad (3)$$

in der  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Tatsächlich hat die Einstein-Gleichung einige Charakteristika einer Wellengleichung. Daher ist es nicht verwunderlich, dass man wellenartige Lösungen finden kann. Indirekt ist es schon vor einigen Jahrzehnten gelungen, solche Gravitationswellen nachzuweisen<sup>2)</sup>, und wir hoffen, dass die erste direkte Messung in den nächsten Jahren eine neue Ära der Gravitationswellenastronomie einleiten wird.

Schwarze Löcher sind Objekte, deren Gravitationsfelder so stark sind, dass noch nicht einmal Licht ent-

weichen kann. Im Zentrum eines Schwarzen Loches befindet sich eine Raumzeit-Singularität, d. h. die Krümmung der Raumzeit ist unendlich. Diese Singularität ist eingehüllt von einem Ereignishorizont. Dieser wirkt wie eine Membran, durch die Objekte, Teilchen, Licht etc. zwar in das Schwarze Loch fallen können, durch die aber nichts entweichen kann.

Die mathematische Beschreibung *isolierter* Schwarzer Löcher ist erstaunlich einfach, komplett analytisch und hängt nur von deren Masse  $M$  und vom Drehimpuls  $J$  ab. Die Metrik  $g_{ab}$  für ein nichtrotierendes Schwarzes Loch ( $J = 0$ ) hat Karl Schwarzschild schon 1916 gefunden – die astrophysikalische Relevanz dieser Lösung wurde allerdings erst viel später klar.

Astronomen unterscheiden verschiedene Populationen von Schwarzen Löchern. „Stellare“ Schwarze Löcher haben Massen von einigen zehn Sonnenmassen; sie entstehen in einem Gravitationskollaps, wenn massive Sterne am Ende ihrer Sternentwicklung ihren nuklearen Treibstoff aufgebraucht haben. Supermassive Schwarze Löcher haben hingegen Massen von Millionen, vielleicht sogar Milliarden von Sonnenmassen und wurden in den Zentren vieler Galaxien nachgewiesen – inklusive unserer eigenen. Wahrscheinlich sind diese Schwarzen Löcher als kleinere „Keime“ im frühen Universum entstanden und dann sowohl durch Akkretion von Gas als auch durch Verschmelzung mit anderen Schwarzen Löchern gewachsen.

Für *nicht-isolierte* Schwarze Löcher und viele andere interessante astrophysikalische Szenarien lässt sich die Einstein-Gleichung nicht analytisch lösen. Ein besonders wichtiges Beispiel sind Binärsysteme von Schwarzen Löchern – Systeme also, in denen zwei Schwarze Löcher umeinander kreisen (Abb. 1). Sie senden Gravitationswellen aus, die dem System Energie und Drehimpuls entziehen. Dadurch verringert sich der Abstand der beiden Schwarzen Löcher; die individuellen Bahnen beschreiben also eine Spirale, die mit der Verschmelzung endet (Abb. 2). Dieser Prozess ist einer der wichtigsten Kandidaten für die direkte Messung von Gravitationswellen. Da wir ihn aber nicht exakt, also durch direkte analytische Lösung der Einstein-Gleichung, verstehen können, benötigen wir geeignete Näherungsverfahren. Für solche dynamischen Prozesse eignen sich insbesondere numerische Verfahren.

### Numerische Relativitätstheorie

Ein guter Startpunkt, um numerische Methoden in der ART zu diskutieren, ist die Wellengleichung (3). Wir können ihre numerische Behandlung vereinfachen, indem wir eine neue Variable  $\kappa \equiv -\partial\phi/\partial t$  einführen und damit die Gleichung zweiter Ordnung in der Zeit in zwei gekoppelte Gleichungen erster Ordnung umwandeln,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi &= -\kappa \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \kappa &= -\nabla^2 \phi + 4\pi G \rho. \end{aligned} \quad (4)$$

2) Siehe den Artikel von Michael Kramer und Norbert Wex.

Dieses Gleichungssystem lässt sich nun mit gebräuchlichen numerischen Methoden entwickeln. Dazu wählen wir Anfangsdaten für  $\phi$  und  $\kappa$  zu einer Zeit  $t = 0$  und lösen die Gleichungen, um  $\phi$  und  $\kappa$  zu späteren Zeiten zu finden (Infokasten „Numerische Methoden“). Dass dies problemlos möglich ist, ist für Mathematiker nicht verwunderlich, da die Gleichung symmetrisch hyperbolisch und die Lösung damit wohldefiniert ist.

Einige Methoden und Probleme der numerischen Relativitätstheorie (NRT) kommen genauso in anderen Gebieten der numerischen Physik vor. Verschiedene numerische Verfahren haben unterschiedliche Vor- und Nachteile bezüglich Stabilität, Genauigkeit und Effizienz; das zu behandelnde Problem kann sehr verschiedene Längen- und Zeitskalen aufweisen, die sich gleichzeitig nur mit Hilfe von adaptiven Gittern lösen lassen etc. (Abb. 1). Zusätzlich gibt es in der NRT drei weitere konzeptionelle Probleme, die in anderen Gebieten keine oder nur eine geringe Rolle spielen: Man muss die Gleichungen in eine geeignete Form bringen, die Raumzeitsingularitäten behandeln und geeignete Koordinaten wählen. In Raumzeiten mit sphärischer oder axialer Symmetrie gelang es, diese Probleme schon vor längerer Zeit zu lösen. Daher gab es einige frühe Erfolge der numerischen Relativitätstheorie – zum Beispiel der Gravitationskollaps von Sternen, die „Head-on“-Kollision zweier Schwarzer Löcher und die Entdeckung von kritischen Phänomenen im Gravitationskollaps (z. B. [3]). Für andere Szenarien, insbesondere Binärsysteme zweier Schwarzer Löcher, die diese Symmetrien nicht aufweisen, haben die erwähnten Probleme den Fortschritt in der NRT für viele Jahre aufgehalten.

Eine Analogie mit den Maxwell-Gleichungen veranschaulicht die Rolle der Form der Gleichungen. Mit Hilfe des Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  (sodass  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) nehmen die Maxwell-Gleichungen die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\mathbf{E} - \nabla \phi \tag{5}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mu_0 \mathbf{J}$$

an. Außerdem muss das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  die Zwangsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{6}$$

erfüllen. Die Gleichungen (4) und (5) haben eine sehr ähnliche Struktur, wenn man  $\mathbf{A}$  mit  $\phi$  und  $\mathbf{E}$  mit  $\kappa$  identifiziert. Aber es gibt natürlich auch große Unterschiede –  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{E}$  sind Vektoren und nicht Skalare, und auf der rechten Seite der zweiten Gleichung tritt nun ein Term  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$  zusätzlich zum Laplace-Operator  $\nabla^2 \mathbf{A}$  auf. Dieser Term kann große Schwierigkeiten bereiten, da er, wie Mathematiker uns berichten würden, die symmetrische Hyperbolizität der Gleichung bricht und damit die Lösung nicht mehr wohldefiniert sein muss.

Dieses Problem lässt sich lösen, indem man die Gleichung in eine andere Form bringt. Insbesondere kann man erste Ableitungen der Variablen durch neue Variablen ausdrücken und die Zwangsbedingung (6) zu den Entwicklungsgleichungen (5) addieren. Wieso kann dies numerische Vorteile haben, schließlich sollte eine exakte Lösung der Gleichungen (5) auch eine exakte Lösung jeder (korrekten) Reformulierung sein? Mathematiker würden uns erklären, dass diese Manipulationen die höchsten Ableitungen, also den Hauptteil des Differentialoperators in (5), verändern. Damit ändern sich die mathematischen Eigenschaften der Gleichungen, und eine geeignete Reformulierung kann wieder wohldefinierte Lösungen haben. Etwas anschaulicher ist dieses Verhalten so zu erklären: Eine numerische Lösung ist nicht exakt, sondern lässt sich als eine exakte Lösung plus ein (hoffentlich kleiner) Fehler beschreiben. Der exakte Teil der Lösung ist zwar

## NUMERISCHE METHODEN

Verschiedene numerische Methoden eignen sich dafür, eine Wellengleichung der Form (4) zu lösen. Eine Möglichkeit ist, ein räumliches Gitter einzuführen. Die x-Koordinate nimmt dann z. B. Werte  $x_i = i \Delta x$  an, wo  $\Delta x$  der Abstand zweier Gitterpunkte ist. Sollte die Lösung auch von anderen Koordinaten abhängen, führen wir ein Gitter auch in diesen Koordinaten ein – der Einfachheit halber werden wir hier aber annehmen, dass die Lösung nur von  $x$  (und der Zeit  $t$ ) abhängt. Wir repräsentieren dann  $\phi = \phi(t, x)$  auf dem Gitter als  $\phi_i(t) = \phi(t, x_i)$  (und ähnlich für  $\kappa$ ). Eine erste Ableitung am „halben“ Gitterpunkt  $i + 1/2$  lässt sich als **finite Differenz**

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i+1/2} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \tag{i}$$

approximieren; eine zweite Ableitung ergibt sich aus der ersten Ableitung

der ersten Ableitung,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i &= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i+1/2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i-1/2} \right) \\ &= \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}. \end{aligned} \tag{ii}$$

Dieser Ausdruck wird nun in Gleichung (4) eingesetzt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_i &= -\kappa_i \\ \frac{\partial}{\partial t} \kappa_i &= -c^2 \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + 4\pi c^2 G \rho_i. \end{aligned} \tag{iii}$$

Offensichtlich haben wir mit Hilfe der finiten Differenzen die partielle Differentialgleichung für  $\phi = \phi(t, x)$  in ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Koeffizienten  $\phi_i = \phi_i(t)$  umgewandelt, die jetzt nur noch von der Zeit  $t$  abhängen. In „**Method of Lines**“-Verfahren werden diese gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Standardmethoden,

z. B. Runge-Kutta-Verfahren, integriert; alternativ könnten wir auch ein zeitliches Gitter einführen und die Zeitableitungen ebenfalls durch finite Differenzen darstellen.

Eine Alternative zu obigen finiten Differenzen sind **spektrale Methoden**, in denen die Lösungsfunktionen durch geeignete Basisfunktionen dargestellt werden, z. B. Tschebyschev-Polynome. In diesem Fall lassen sich Ableitungen exakt durch die Ableitungen der Basisfunktionen ausdrücken.

In einer numerischen Behandlung der Maxwell-Gleichungen (oder gar der Einstein-Gleichung) kann man ganz ähnlich vorgehen, nur dass man jetzt alle Differentialoperatoren zunächst als partielle Ableitungen ausschreiben muss und dass man die Komponenten der Vektoren (oder Tensoren) auf Gittern oder durch Basisfunktionen ausdrückt.

für alle Reformulierungen der gleiche, aber der Fehler kann sich in verschiedenen Reformulierungen komplett anders verhalten. Dies ist ausschlaggebend für numerische Simulationen, wie im Infokasten „Reformulierung der Maxwell-Gleichungen“ beispielhaft gezeigt ist.

Das Beispiel der Maxwell-Gleichungen ist relevant für die NRT, da die Einstein-Gleichung oft in die „ADM-Form“ (nach Arnowitt, Deser und Misner [4]) gebracht wird. Die ADM-Gleichungen ähneln den Maxwell-Gleichungen (5), genau wie die Maxwell-Gleichungen der Wellengleichung (4). In numerischen Implementationen dieser ADM-Gleichungen wächst der Fehler im Allgemeinen so schnell an, dass eine robuste Entwicklung der Anfangsdaten unmöglich ist. Reformulierungen der ADM-Gleichungen sind jedoch sehr erfolgreich. Ein Beispiel sind die BSSN-Gleichungen [5], die sich in vollständiger Analogie zu den Manipulationen im Infokasten herleiten lassen (vgl. [6] für andere erfolgreiche Formulierungen).

Die *Raumzeitsingularitäten* im Zentrum Schwarzer Löcher sind für numerische Programme schwer verdaulich. Eine Möglichkeit ist jedoch, sie gar nicht zu behandeln: Wie wir oben diskutiert haben, kann das Innere eines Schwarzen Loches keinen Einfluss auf das Äußere haben und muss daher auch numerisch nicht berücksichtigt werden. In der „Excision“-Methode wird daher ein Teil des Schwarzen Loches vom numerischen Gitter entfernt (Abb. 1). Eine alternative Methode hat mit der Wahl *geeigneter Koordinaten* zu tun. Eine bestimmte Klasse von Koordinaten – die „Moving-Puncture“-Koordinaten – haben die interessante Eigenschaft, dass sie Gitterpunkte immer in einer gewissen Entfernung von den Singularitäten halten. Erstaunlicherweise lassen sich mit Hilfe dieser Koordinaten Schwarze Löcher simulieren, fast ohne sich weiter um die Singularitäten kümmern zu müssen.

Mit Hilfe dieser und ähnlicher Methoden gelang es nach Jahrzehnten vergeblicher Versuche 2005 erstmals, Binärsysteme von Schwarzen Löchern numerisch zu simulieren [7]. Dieser enorme Durchbruch in der NRT ist mit entsprechend großem Enthusiasmus aufgenom-

men worden – und hat außerdem zu einigen erstaunlichen und unerwarteten Erkenntnissen geführt.

### Die Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher

Diese Simulationen haben es zum ersten Mal erlaubt, die Gravitationswellen vorherzusagen, die zwei Schwarze Löcher in einem Binärsystem aussenden. Während sie sich auf einer Spiralbahn näher kommen, wachsen sowohl die Amplitude als auch die Frequenz des Gravitationswellensignals  $\dot{h}(t)$  an (Abb. 2). Die beiden Schwarzen Löcher verschmelzen, wenn sie sich zu nahe kommen und bilden ein neues, aber zunächst gestörtes Schwarzes Loch. Dieses emittiert exponentiell gedämpfte Gravitationswellen fast konstanter Frequenz und relaxiert in einem Prozess, der „Quasi-normal-Ringing“ genannt wird, zu einem stationären, aber rotierenden Schwarzen Loch – beschrieben durch eine Kerr-Lösung der Einstein-Gleichung (Abb. 3).

Für Binärsysteme, in denen die Schwarzen Löcher nicht rotieren, sehen diese Gravitationswellensignale ähnlich aus wie in Abb. 2. Für rotierende Schwarze Löcher gibt es aber einige Überraschungen, die wie folgt zu verstehen sind: Analog zu einer beschleunigten Ladung, deren elektromagnetische Strahlung linearen Impuls trägt, verliert auch eine beschleunigte Masse durch die emittierte Gravitationsstrahlung linearen Impuls. Körper in Kreisbahnen sind ständig beschleunigt und verlieren daher ständig linearen Impuls. In symmetrischen Binärsystemen verlieren die beiden Komponenten jedoch linearen Impuls in genau entgegengesetzte Richtung, sodass sich der Effekt aufhebt. Das Binärsystem muss aber nicht symmetrisch sein: Sowohl verschiedene Massen als auch Rotationen der einzelnen Schwarzen Löcher können die Symmetrie brechen. In solchen nicht-symmetrischen Binärsystemen wird eine Komponente stärker beschleunigt als die andere. Dem Binärsystem wird jetzt Netto-Impuls entzogen – der Massenschwerpunkt des Systems spürt also eine Kraft und wird beschleunigt. Dieser Prozess endet, wenn die

### REFORMULIERUNG DER MAXWELL-GLEICHUNGEN

<p>Wir können den Fehler einer Lösung der Maxwell-Gleichungen messen, indem wir die Abweichung der Zwangsbedingung (6)</p>	<p>der Rechnung entsteht, erhalten bleibt und nicht wieder verschwindet.</p>	<p>Wenn man nun die Gl. (5) durch (vi) und (vii) ersetzt, gilt (v) nicht mehr. Stattdessen lässt sich zeigen, dass C jetzt einer Wellengleichung</p>
$C \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0 \quad (iv)$	<p>In einer Reformulierung der Maxwell-Gleichungen kann der Term <math>\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})</math> eliminiert werden, indem man eine neue Variable <math>\Gamma \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}</math> einführt. Die Gleichungen (5) werden dann</p>	$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) C = 0 \quad (viii)$
<p>von null berechnen. Wie man in der Elektrodynamik lernt, folgt aus den Gl. (5) (zusammen mit der Kontinuitätsgleichung <math>\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t</math>), dass</p>	$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\mathbf{E} - \nabla\varphi \quad (vi)$ $\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla\Gamma - \mu_0 \mathbf{J}.$	<p>genügt. Das bedeutet also, dass sich Fehler in dieser Reformulierung der Maxwell-Gleichungen ganz anders verhalten als in der originalen Formulierung; insbesondere können Fehler, die während der Rechnung entstehen, nun propagieren, und, mit geeigneten Randbedingungen, vom numerischen Gitter verschwinden.</p>
$\frac{\partial}{\partial t} C = 0. \quad (v)$	<p>Wir betrachten <math>\Gamma</math> als neue unabhängige Variable und müssen daher auch eine neue Entwicklungsgleichung für <math>\Gamma</math> herleiten:</p>	
<p>Diese Eigenschaft bedeutet, dass die Zwangsbedingung (6) erhalten bleibt, wenn die Felder mit (5) entwickelt werden. Numerisch gesehen bedeutet dies aber auch, dass ein Fehler, der während</p>	$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma = \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}\right) = -\nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \varphi$ $= -\rho/\epsilon_0 - \nabla^2 \varphi \quad (vii)$	

beiden Schwarzen Löcher miteinander verschmelzen. Die Emission von Gravitationsstrahlung nimmt dann sehr schnell ab und damit die Beschleunigung des Massenschwerpunkts, der danach als Schwerpunkt des Überrestes mit konstanter Geschwindigkeit weiterfliegt. Dieser Effekt ist als „Black Hole Recoil“ bekannt.

Die Auswirkung der Symmetriebrechung durch ungleiche Massen wurde als erstes untersucht. Mehrere Gruppen haben Simulationen durchgeführt und herausgefunden, dass die maximale Geschwindigkeit des Überrestes etwa 175 km/s ist, für einen Massenquotienten von  $M_1/M_2 \approx 0,36$  [8]. Diese Werte sind vollkommen konsistent mit vorherigen Post-Newtonschen Abschätzungen, sind aber nicht besonders hoch – in Abb. 3 wäre dieser Effekt nur schwer zu sehen.

Wesentlich aufregender sind Systeme mit rotierenden Schwarzen Löchern. Eine Zeitlang gab es fast wöchentlich Publikationen mit neuen Rekorden für den „Black Hole Recoil“ (z. B. [9]). Für Systeme, in denen die Schwarzen Löcher einen Spindrehimpuls in entgegengesetzter Richtung, aber beide nahe der Orbitalebene haben, können Geschwindigkeiten von über 4000 km/s auftreten. Dies hat wichtige astrophysikalische Konsequenzen, da die Fluchtgeschwindigkeiten von den Zentren der größten Galaxien etwa 2000 km/s sind. Wir wissen, dass (zumindest) viele Galaxien Schwarze Löcher in ihren Zentren beherbergen. Wir wissen auch, dass Galaxien miteinander verschmelzen und daher auch die Schwarzen Löcher in ihren Zentren. Offensichtlich kann der „Black Hole Recoil“ eine wichtige Rolle in der hierarchischen Strukturbildung und der Entwicklung dieser Galaxien spielen.

Ein anderer Effekt ist der „Spin Flip“. Vor dem Verschmelzen der Schwarzen Löcher haben beide einen Spindrehimpuls; außerdem hat das Binärsystem einen Bahndrehimpuls. Alle drei Drehimpulse können verschiedene Richtungen haben. Während des Verschmelzens verliert das System einen Teil des Gesamtdrehimpulses – in grober Näherung ist der Drehimpuls des Restes aber die Summe der drei ursprünglichen Drehimpulse. Offensichtlich kann dieser Drehimpuls in eine andere Richtung zeigen als beide ursprüngliche Spindrehimpulse. Auch dieser Effekt hat astrophysikalische Konsequenzen. Akkretierende Schwarze Löcher entsenden Jets entlang ihrer Drehachse, also in Richtung ihres Drehimpulses, die sich beobachten lassen. In Bildern von x-förmigen Jets sieht es jedoch so aus, als hätten sie zu einem bestimmten Zeitpunkt die Richtung ihrer Emission geändert (Abb. 4). Eine mögliche Erklärung ist, dass das emittierende Schwarze Loch mit einem anderen Schwarzen Loch verschmolzen ist und sich in einem „Spin Flip“ die Richtung des Drehimpulses plötzlich geändert hat.

## Ausblick

Die Lösung des „Schwarz-Loch-Problems“ vor etwa zehn Jahren war ein enormer Durchbruch in der NRT. Die ursprüngliche Motivation für diese Rechnungen

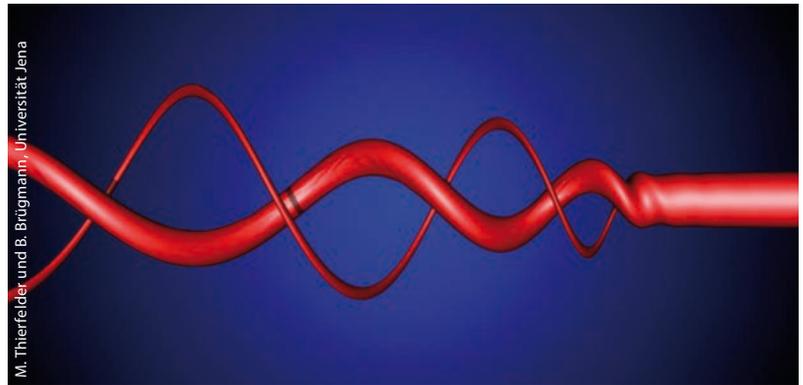


Abb. 3 Raumzeitdiagramm für die Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher [8]. Die x-Achse ist die Zeit, sodass jede vertikale Ebene den Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt darstellt. Die roten Ober-

flächen repräsentieren die Horizonte der zwei Schwarzen Löcher (verschiedener Masse); sie verschmelzen nach mehreren Kreisbahnen und bilden ein zunächst gestörtes Schwarzes Loch als Überrest.

war die Vorhersage der Gravitationswellen, die zwei verschmelzende Schwarze Löcher entsenden – außerdem sind mit diesen Rechnungen neue Phänomene entdeckt worden, die direkte astrophysikalische Konsequenzen haben. Natürlich bleiben ungelöste Probleme in der numerischen relativistischen Astrophysik bestehen.

Einerseits benötigen wir für die Datenanalyse von Gravitationswellendetektoren nicht individuelle Gravitationswellensignale, sondern ganze Kataloge, damit sich ein gemessenes astrophysikalisches Signal korrekt mit einer Quelle identifizieren lässt. Für beliebige Massen und Drehimpulse bilden Binärsysteme von Schwarzen Löchern einen siebendimensionalen Parameterraum. Da jede Simulation eines Binärsystems sehr lange dauert, lässt sich dieser Parameterraum nicht beliebig „dicht“ untersuchen. Forscher in der NRT arbeiten deshalb aktiv mit Experten in Post-New-

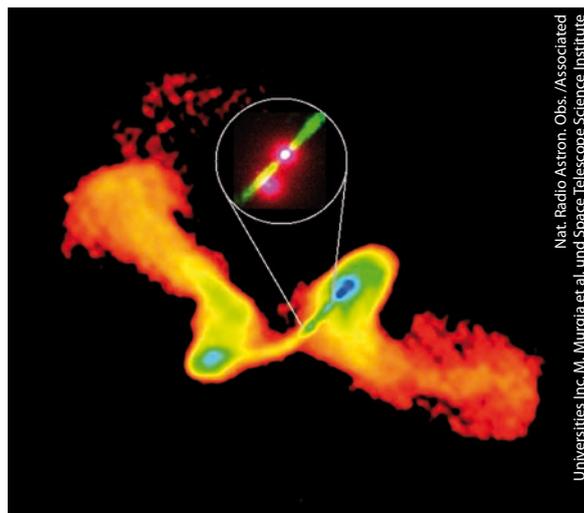
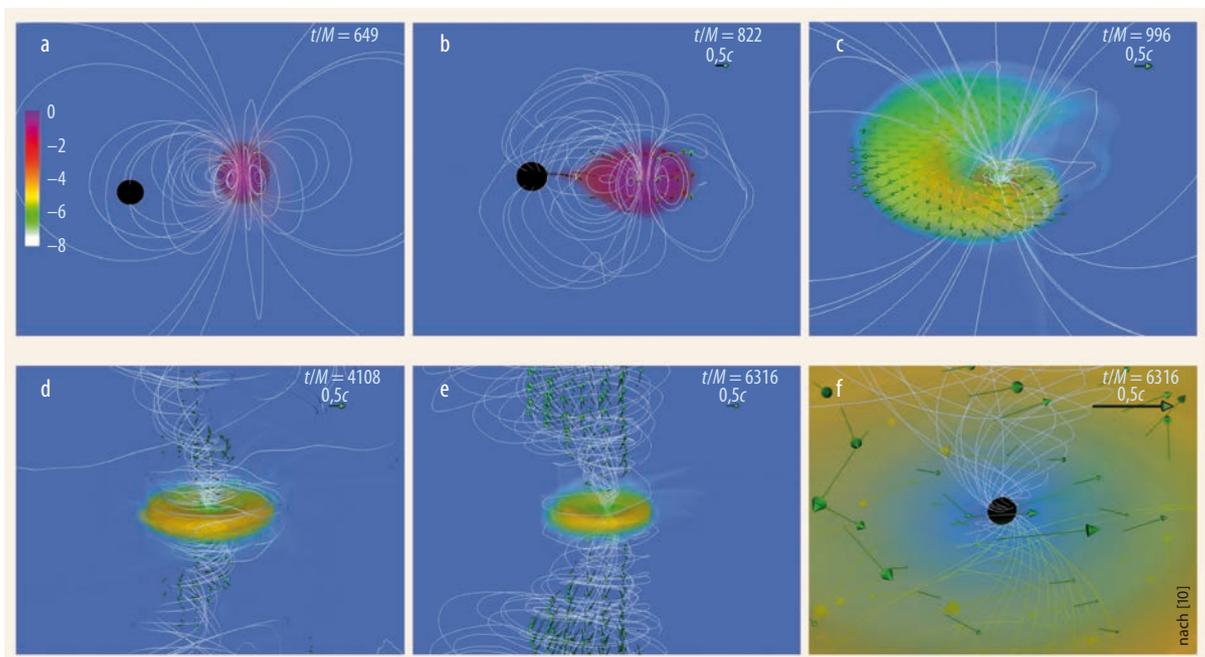


Abb. 4 In der Radio-Galaxie NGC 326 scheint sich die Richtung des Jets plötzlich geändert zu haben: Die größere Struktur weist auf eine Emission in die Richtung von etwa 4 und 10 Uhr in der Vergangenheit hin, während die kleinere Struktur durch eine gegenwärtige Emission in die Richtung von etwa 2 und 8 Uhr entstanden ist. Diese Richtungsänderung kann möglicherweise durch den „Spin Flip“ in der Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher erklärt werden.



**Abb. 5** Die Dichteverteilung in der Verschmelzung eines Neutronensterns mit einem Schwarzen Loch, zusammen mit dem Magnetfeld (weiße Linien). Die Dichte ist auf einer logarithmischen Skala ge-

zeigt, relativ zur maximalen Dichte am Anfang der Simulation; die Pfeile zeigen die Geschwindigkeit des Plasmas. Die Gezeitenkräfte zerreißen den Neutronenstern, der dann eine Akkretionsscheibe

um das Schwarze Loch bildet. Gleichzeitig fokussieren sich die Magnetfelder und bilden den Ansatz eines Jets. Das letzte Teilbild zeigt einen vergrößerten Blick auf die Scheibe „von oben“ (f)

tonischen-Näherungsmethoden und Gravitationswellen-Datenanalyse zusammen, um die bestmöglichen Kataloge zu erstellen.

Andererseits haben wir in diesem Artikel nur die Lösung der Einstein-Gleichung für Vakuumlösungen besprochen. Für viele interessante Probleme in der relativistischen Astrophysik ist dies aber nicht adäquat: So können Schwarze Löcher Akkretionsscheiben haben oder mit Materie wechselwirken, sie können im Gravitationskollaps von massiven Sternen entstehen etc. In Simulationen solcher Szenarien muss man gleichzeitig mit der Einstein-Gleichung die Gleichungen für relativistische Hydrodynamik, Elektrodynamik, Strahlungstransport und mikrophysikalische Zustandsgleichungen berechnen (Abb. 5).

Andere Gruppen hingegen wenden die neuen Methoden der NRT auf Probleme an, die durch die String-Theorie motiviert werden. Möglicherweise hat die Raumzeit nicht nur drei, sondern mehr räumliche Dimensionen. In höheren Dimensionen sind die Eigenschaften von Schwarzen Löchern sowohl komplizierter als auch faszinierender als in drei Dimensionen.

Diese Eigenschaften und die vielen anderen Phänomene und Konsequenzen der Allgemeinen Relativitätstheorie werden sich mit den ausgereiften Methoden der NRT weiter erkunden lassen.

#### Literatur

- [1] A. H. Mroue et al., Phys. Rev. Lett. **111**, 241104 (2013)
- [2] T. W. Baumgarte und S. L. Shapiro, Numerical Relativity, Cambridge University Press, New York (2010); M. Alcubierre, Introduction to 3+1 Numerical Relativity, Oxford University Press, Oxford (2008); C. Bona, C. Palenzuela-Luque und C. Bona-Casas, Elements of Numerical Relativity and Relativistic Hydro-

- namics, Springer, Heidelberg (2009) und E.ourgoulhon, 3+1 Formalism in General Relativity, Springer, Heidelberg (2012)
- [3] S. G. Hahn und R. W. Lindquist, Ann. Phys. **29**, 304 (1964); P. Anninos et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 2851 (1993); R. A. Matzner et al., Science **270**, 941 (1995); M. W. Choptuik, Phys. Rev. Lett. **70**, 9 (1993)
- [4] R. Arnowitt, S. Deser und C. W. Misner, in: L. Witten (Hrsg.), Gravitation, an Introduction to Current Research, Wiley, New York (1962), S. 227
- [5] T. Nakamura, K. Oohara und Y. Kojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. **90**, 1 (1987); M. Shibata und T. Nakamura, Phys. Rev. D **52**, 5428 (1995); T. W. Baumgarte und S. L. Shapiro, Phys. Rev. D **59**, 024007 (1998)
- [6] H. Friedrich, Commun. Math. Phys. **100**, 525 (1985); D. Garfinkle, Phys. Rev. D **65**, 044029 (2002); C. Bona et al., Phys. Rev. D **67**, 104005 (2003); D. Alic et al., Phys. Rev. D **85**, 064040 (2012)
- [7] F. Pretorius, Phys. Rev. Lett. **95**, 121101 (2005); M. Campanelli et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 111101 (2006); J. G. Baker et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 111102 (2006)
- [8] J. A. González et al., Phys. Rev. Lett. **98**, 091101 (2007)
- [9] J. A. González et al., Phys. Rev. Lett. **98**, 231101 (2007); M. Campanelli et al., Phys. Rev. Lett. **98**, 231102 (2007)
- [10] V. Paschalidis, M. Ruiz und S. L. Shapiro, arXiv:1410.7392 (2014)

#### DER AUTOR

**Thomas Baumgarte** nahm nach dem Studium an der LMU München und Cornell University sowie einem Postdoc an der University of Illinois 2001 eine Professur am Bowdoin College an, einem kleinen „Liberal Arts“-College an der Küste von Maine. Seine Arbeiten in der numerischen Relativitätstheorie und relativistischen Astrophysik sind mit einem Guggenheim Fellowship sowie dem Friedrich Wilhelm Bessel-Preis der Alexander-von-Humboldt-Stiftung ausgezeichnet worden. In seiner Freizeit spielt er Kontrabass im „Midcoast Symphony Orchestra“.

