

Von Graphit zu Graphen

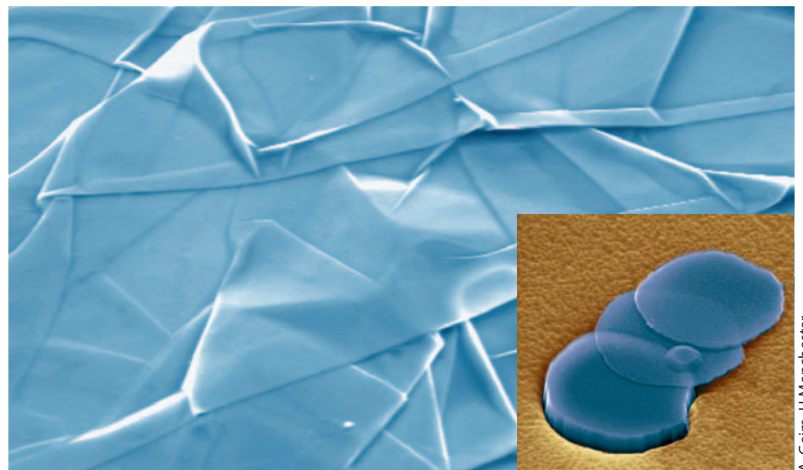
Einatomare Kohlenstoffschichten sind ein neues Modellsystem für Elektronen in zwei Dimensionen.

Björn Trauzettel

Seit es vor drei Jahren gelungen ist, einzelne, nur ein Atom dicke Kohlenstoffschichten zu präparieren, stürzen sich Experimentatoren und Theoretiker auf Graphen. Diese jüngste Modifikation von Kohlenstoff verhält sich in jeder Beziehung anders als übliche Halbleiter wie Silizium. Zu dem besonderen Reiz daran trägt insbesondere die Tatsache bei, dass sich die Elektronen darin verhalten, als seien sie masselose, ultrarelativistische Teilchen.

Kohlenstoff ist eines der wichtigsten Elemente der Biosphäre und allgegenwärtig. Unter seinen zahlreichen Modifikationen sind die beiden in der Natur vorkommenden dreidimensionalen Kristalle, Diamant und Graphit, seit Jahrtausenden bekannt. 1985 erhielten die Modifikationen Zuwachs, als Robert F. Curl jr., Sir Harold W. Kroto und Richard E. Smalley die kugelartigen Fullerene entdeckten, wofür sie 1996 den Nobelpreis für Chemie erhielten. Nur wenige Jahre später zeigte Sumi Iijima 1991, dass neben den gewissermaßen nulldimensionalen Fullerenen auch eindimensionale, zylindrische Kohlenstoff-Nanoröhren existieren, die sich in kürzester Zeit zu einem der aktivsten Forschungsgebiete der Festkörperphysik entwickelt haben. Da Graphit in kristalliner Form aus parallel verlaufenden ebenen Schichten besteht, in denen die Kohlenstoffatome bienenwabenartig angeordnet sind, lag es nahe, auch diese Schichten – Graphen genannt – einzeln zu untersuchen (Abb. 1). Doch obwohl sich der Theoretiker P. R. Wallace bereits vor 60 Jahren mit dieser zweidimensionalen Modifikation beschäftigt hat [1], gelang es erst 2004, diese zu präparieren und experimentell zu untersuchen. Davor war keine geeignete Methode bekannt, um Graphen aus Graphit zu extrahieren und zur weiteren Analyse auf ein Substrat zu montieren. Der experimentelle Durchbruch hat eine Reihe von interessanten Fragen aufgeworfen, die nun in der Festkörperphysik intensiv und durchaus auch kontrovers diskutiert werden. Aufgrund der hohen Dynamik, die von diesem Forschungsfeld ausgeht, gibt es mittlerweile sowohl von experimenteller als auch von theoretischer Seite eine ganze Reihe von neuen und zukunftssträchtigen Entdeckungen, von denen eine Auswahl im Folgenden näher beschrieben wird.

Kohlenstoff ist das erste Element der vierten Hauptgruppe des Periodensystems. Es hat in der äußeren Schale zwei s- und zwei p-Elektronen. Die Kristall-



A. Geim, U. Manchester

struktur wird durch drei dieser vier Elektronen bestimmt, die sp^2 -hybridisiert sind. Das vierte Elektron der äußeren Schale, das π -Elektron, ist gemeinsam mit allen anderen π -Elektronen hauptverantwortlich für die elektronischen Eigenschaften von Graphen. Innerhalb einer Schicht beträgt die Bindungsenergie zwischen den Kohlenstoff-Atomen 4,3 eV. Zwischen zwei Schichten beträgt sie dagegen nur 0,07 eV. Daher sollte es prinzipiell möglich sein, einzelne Schichten voneinander zu isolieren, ohne dabei die Struktur innerhalb einer Schicht zu zerstören. Um dies realisieren zu können, bedarf es nur noch einer praktischen Methode.

Vor drei Jahren gelang es einer Gruppe von Forschern um Andre K. Geim und Kostya S. Novoselov von der University of Manchester, Graphen auf einem Siliziumoxid-Substrat zu isolieren [2]. Dieser Durchbruch basierte interessanterweise auf einer Low-Tech-

Wie ein zerknittertes Seidentuch sieht eine einzelne Graphen-Schicht unter dem Elektronenmikroskop aus. Die Schichten lassen sich einzeln von Graphit-flocken ablösen (Inset).

KOMPAKT

- In Graphen, einer perfekt einatomaren Schicht von Graphit, sind die Kohlenstoff-Atome in einem hexagonalen Gitter angeordnet.
- Leitungs- und Valenzband berühren sich in Graphen in sechs ausgezeichneten Punkten, in deren Umgebung die Energie wie bei einem relativistischen Teilchen linear vom Impuls abhängt. Aufgrund der zweiatomaren Basis hat die Wellenfunktion zudem eine Spinorstruktur.
- Dies führt zu charakteristischen Änderungen beim Quanten-Hall-Effekt, die diese ungewöhnlichen Eigenschaften zweifelsfrei belegt haben.
- Auch für Anwendungen von Graphen, insbesondere für Quanten-Bits, gibt es bereits erste Ideen.

Dr. Björn Trauzettel,
Departement Physik
und Astronomie,
Universität Basel,
Klingelbergstr. 82,
CH-4056 Basel

Methode, die darin besteht, Tesafilm auf Graphit-splitter zu drücken und anschließend die am Tesafilm klebenden Flocken auf ein Siliziumoxid-Substrat zu pressen [3]. Der Vorgang sollte einige Male wiederholt werden. Man kann sich den Prozess so vorstellen, dass der Tesafilmstreifen aus den parallel verlaufenden ebenen Graphen-Schichten (im Graphit) entweder eine oder mehrere Schichten herausreißt. Der schwierigste Schritt bei der Entdeckung des Graphens war, genau solche Flocken zu identifizieren, die wirklich nur aus einer einzigen Schicht von Kohlenstoffatomen bestanden. Die Forscher aus Manchester fanden heraus, dass einatomare Schichten aus Graphen unter einem optischen Mikroskop sichtbar sind, wenn die Dicke des Siliziumoxid-Substrats richtig gewählt ist. Sobald eine Graphen-Flocke identifiziert wird, kann man sie kontaktieren und Messungen des elektrischen Transports daran vornehmen.

Abgesehen von der oben genannten Tesafilm-Methode gibt es inzwischen auch ausgereifere Techniken, um Graphenschichten herzustellen. Die bislang erfolgreichste ist das von Walt A. de Heer und Claire Berger an der Georgia Tech in Atlanta entwickelte epitaktische Wachsen von Graphen auf einem Siliziumkarbid-Substrat [4]. Allerdings ist es dabei schwieriger, genau eine Basisschicht zu erzeugen. Darüber hinaus beeinflusst das Substrat das elektronische Spektrum der Graphenschichten. Da sich diese Methode für die Massenproduktion eignet, erachten es weltweit viele Gruppen für wichtig, die Forschung mit epitaktisch gewachsenem Graphen zu intensivieren. Als Beispiel sei hier die winkelaufgelöste Photoemissionsspektroskopie (angle resolved photoemission spectroscopy, ARPES) erwähnt, die es ermöglicht, die Quasiteilchendynamik in Graphen zu messen [5].

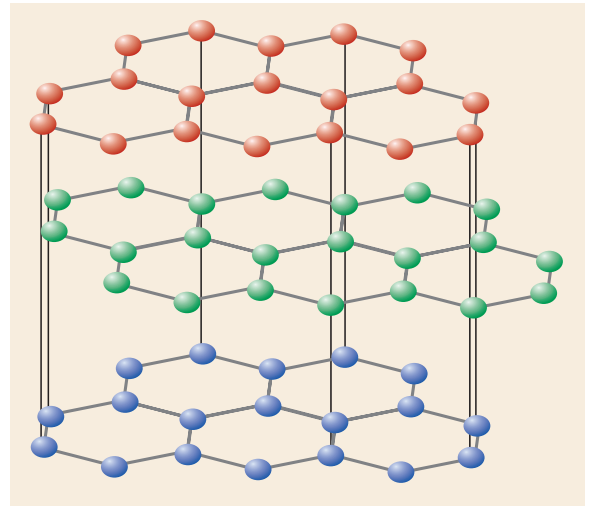


Abb. 1 Graphit besteht aus parallelen, ebenen Schichten. Eine einzelne Basisschicht (hier: rot, grün und blau) bezeichnet man als Graphen; sie weist die typische hexagonale Anordnung von Kohlenstoffatomen auf.

Diese Experimente sowie theoretische Untersuchungen haben zu faszinierenden Ergebnissen geführt. So lässt sich in Graphen der Quanten-Hall-Effekt sogar bei Raumtemperatur beobachten (allerdings bei sehr hohen Magnetfeldstärken). Daneben weist Graphen eine schwache Spin-Bahn-Kopplung auf, was es für Anwendungen aus der Spintronik interessant macht. Am meisten aber fasziniert wohl die Bandstruktur von Graphen: Die niederenergetischen Anregungen weisen nämlich eine lineare Dispersionsrelation auf, d. h. die Energie ist proportional zum Impuls wie bei masselosen und ultra-relativistischen Teilchen (mit einer effektiven Lichtgeschwindigkeit, die der Fermi-Geschwindigkeit $v_F \approx c/300$ entspricht).

Ungewöhnliche Bandstruktur

Um die Bandstruktur von Graphen genauer verstehen zu können, ist es hilfreich, das reale und das reziproke Gitter von Graphen vor Augen zu haben [6]. Das reale Gitter hat eine zwei-atomare Basis mit den beiden daraus resultierenden Untergittern A und B, die eine hexagonale Struktur von Kohlenstoffatomen erzeugen (Abb. 2a). Das entsprechende reziproke Gitter weist ebenfalls eine hexagonale Struktur auf (Abb. 2b). Die Eckpunkte der ersten Brillouin-Zone (die sog. **K**-Punkte) spielen im Spektrum von Graphen eine besondere Rolle, denn an diesen Punkten berühren sich gerade das Valenz- und das Leitungsband. Es gibt mehrere Möglichkeiten, das Spektrum von Graphen bei niedrigen Energien zu berechnen. Beispielsweise lässt sich man mithilfe der $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Theorie und den Symmetrieeigenschaften des realen und des reziproken Gitters der Hamilton-Operator konstruieren und danach die Schrödinger-Gleichung lösen [7]. Der etwas einfachere Zugang zur Berechnung des Spektrums der delokalisierten π -Elektronen von Graphen basiert auf dem Tight-Binding-Modell (s. Infokasten) [1]. Das

DAS TIGHT-BINDING-MODELL

Im **Tight-Binding-Modell** lässt sich der Hamilton-Operator der delokalisierten π -Elektronen von Graphen schreiben als

$$H = t \sum_{\langle ij \rangle} A_i^\dagger B_j + B_j^\dagger A_i, \quad (i)$$

wobei die Summation nur über Nächste-Nachbar-Gitterpunkte durchgeführt wird und die Operatoren A_i^\dagger (A_i) Wannier-Zustände auf dem Gitterpunkt i des Untergitters A erzeugen (vernichten). Entsprechendes gilt für B_j^\dagger (B_j) auf dem Untergitter B. Das Tunnelmatrixelement t wird durch das atomare Potential des Gitters bestimmt. Die Eigenzustände sind Bloch-Wellenfunktionen der Form

$$|\Psi_{\vec{k}}\rangle = [\alpha \sum_i (e^{i\vec{k}\vec{R}_i} A_i^\dagger) + \beta \sum_j (e^{i\vec{k}\vec{R}_j} B_j^\dagger)] |0\rangle. \quad (ii)$$

In dieser Gleichung sind α, β Koeffizienten, \vec{R}_i Gittervektoren, $\vec{k} = (k_x, k_y)$ der Wellenzahlvektor und $|0\rangle$ der Vakuumzustand. Die stationäre Schrödinger-Gleichung $H |\Psi_{\vec{k}}\rangle = E |\Psi_{\vec{k}}\rangle$ hat als Lö-

sung ein relativ kompliziertes Spektrum. Für Anregungen in der Umgebung der **K**-Punkte (bis zu Energien von 1 bis 2 eV) lässt sich die Schrödinger-Gleichung schreiben als

$$\hbar v_F \vec{k} \cdot \vec{\sigma} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle. \quad (iii)$$

Dabei ist $v_F = (\sqrt{3} t a) / 2\hbar \approx 10^6$ m/s die Fermi-Geschwindigkeit der Ladungsträger, E die Anregungsenergie relativ zum Ladungsneutralitätspunkt, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ sind Pauli-Matrizen, und $|\Psi\rangle = (|\Psi_A\rangle, |\Psi_B\rangle)$ ist eine Spinor-Wellenfunktion, die den Anteil der Wellenfunktion auf Untergitter A ($|\Psi_A\rangle$) bzw. B ($|\Psi_B\rangle$) als Komponenten enthält. Die Spinorstruktur hat demnach nichts mit dem Spinfreiheitsgrad der Elektronen zu tun, sondern mit der Tatsache, dass das reale Gitter eine zweiatomare Basis besitzt. Man assoziiert mit $\vec{\sigma}$ einen Pseudospin-Freiheitsgrad. Interessanterweise entspricht Gl. (iii) der Dirac-Weyl-Gleichung für masselose Neutrinos.

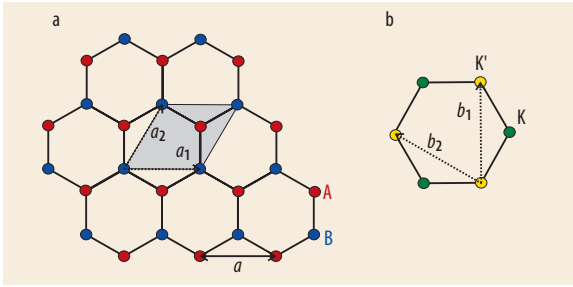


Abb. 2 a) Das typische Honigwabengitter eines Graphen-Kristalls wird durch die primitiven Gittervektoren a_1 und a_2 aufgespannt. Da eine Einheitszelle (grau schattiert) eine zweiatomare Basis hat, gibt es ein rotes und ein blaues Untergitter. Die Gitterkonstante eines Untergitters ist $a \approx 0,246$ nm. b) Für die niederenergetischen Anregungen in Graphen spielen die Eckpunkte der ersten Brillouin-Zone im reziproken Gitter eine wichtige Rolle. Man sieht, dass es zwei inäquivalente Eckpunkte gibt, die im Allgemeinen mit \mathbf{K} und \mathbf{K}' bezeichnet werden (grüne bzw. gelbe Punkte). Inäquivalenz bedeutet hier, dass man von den \mathbf{K}' -Punkten durch die Basisvektoren b_1 und b_2 des reziproken Gitters zu den anderen \mathbf{K}' -Punkten gelangen kann, aber eben gerade nicht zu den \mathbf{K} -Punkten. Diese Punkte definieren den Valley-Freiheitsgrad in Graphen.

relativ komplizierte Spektrum weist fast überall eine Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband auf (Abb. 3). Die einzige Ausnahme bilden sechs diskrete Punkte (die Eckpunkte der ersten Brillouin-Zone), wo sich Valenz- und Leitungsband berühren. Demnach ist Graphen an diesen \mathbf{K} -Punkten ein Halbleiter mit verschwindender Bandlücke. In der Umgebung der \mathbf{K} -Punkte lässt sich das Spektrum linearisieren, und als Lösung des Eigenwertproblems ergibt sich die bereits erwähnte lineare Dispersionsrelation

$$E = \pm \hbar v_F (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \quad (1)$$

mit der Fermi-Geschwindigkeit $v_F = (\sqrt{3} t a)/2\hbar \approx 10^6$ m/s. Das Vorzeichen „+“ entspricht der Leitungsbandlösung und das Vorzeichen „-“ der Valenzbandlösung des Graphenspektrums.

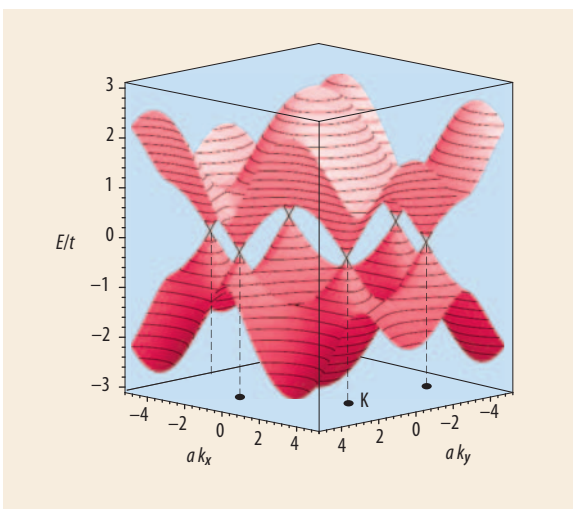


Abb. 3 Das Energiespektrum von Graphen, das mit dem Tight-Binding-Modell in Gl. (i) aus dem Infokasten berechnet wurde, hat ein Valenzband (mit $E < 0$) und ein Leitungsband (mit $E > 0$). An den \mathbf{K} -Punkten berühren sich Valenz- und Leitungsband. Diese Punkte bezeichnet man als Ladungsneutralitätspunkte oder auch als Dirac-Punkte in Anlehnung an Gl. (iii).

Da die Schrödinger-Gleichung in der Nähe der \mathbf{K} -Punkte formal der Dirac-Weyl-Gleichung für masselose Neutrinos entspricht (s. Infokasten „Tight-Binding-Modell“), verhalten sich die Elektronen in Graphen formal wie ultrarelativistische Teilchen. Diese Analogie zur Quanten-Elektrodynamik in 2+1 Dimensionen ist einer der Hauptgründe, warum die Analyse der physikalischen Eigenschaften von Graphen so großes Interesse in verschiedensten Bereichen der Physik weckt.

Der Quanten-Hall-Effekt in Graphen

Im Jahr 2005 gelang in den Gruppen von Andre K. Geim und Kostya N. Novoselov in Manchester [8] sowie von Horst L. Störmer und Philip Kim an der Columbia University in New York [9] parallel der Nachweis des Quanten-Hall-Effektes (QHE) in Graphen. Dieser experimentelle Durchbruch zeigte eindeutig, dass die Beschreibung des elektronischen Transports in Graphen durch die Dirac-Weyl-Gleichung korrekt ist. Interessanterweise liefert eine Quanten-Hall-Messung ein eindeutiges Unterscheidungsmerkmal zwischen Ein-Schicht-Graphen und mehrschichtigem Graphen (Graphit). Daher wird der QHE momentan häufig zur Kalibrierung eines Graphen-Präparates benutzt. In Ein-Schicht-Graphen ist die Hall-Leitfähigkeit typischerweise quantisiert gemäß

$$\sigma_{xy} = \pm 4 (e^2/h) (N + 1/2), \quad (2)$$

wobei N die Quantenzahl der Landau-Niveaus ist und e^2/h das Leitwertquantum (Abb. 4, vgl. Infokasten „Der Quanten-Hall-Effekt“). Alle Landau-Niveaus sind vierfach entartet, bestehend aus einer zweifachen Spin-entartung (\uparrow, \downarrow) und einer zweifachen Valley-Entartung (\mathbf{K}, \mathbf{K}'). In einem „normalen“ zweidimensionalen Elektronensystem mit vierfacher Entartung der Landau-Niveaus und einer Elektron-Loch-Symmetrie wäre eine

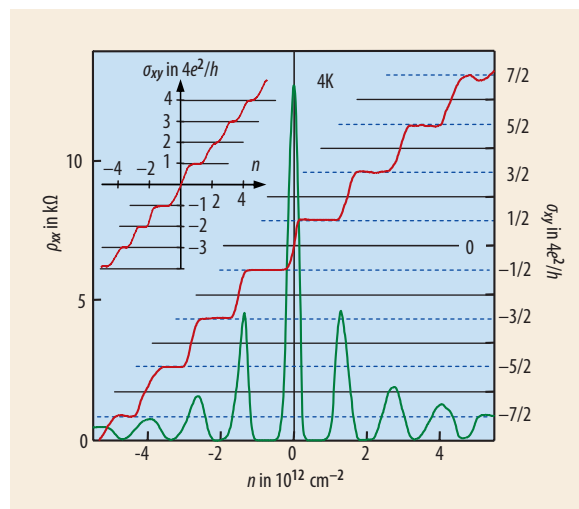


Abb. 4 Bei der Messung des Quanten-Hall-Effekts in Ein-Schicht-Graphen weisen longitudinaler Widerstand ρ_{xx} (grün) und Hall-Leitfähigkeit σ_{xy} (rot) als Funktion der Ladungsträgerdichte n charakteristische Besonderheiten auf (bei 14 Tesla, nach [8]). Der Inset zeigt die Hall-Leitfähigkeit σ_{xy} für Zwei-Schicht-Graphen.

Hall-Leitfähigkeit $\sigma_{xy} = \pm 4 (e^2/h) N$ zu erwarten. Der entscheidende Unterschied ist die Verschiebung der Hall-Leitfähigkeit um einen konstanten Term $2e^2/h$, sodass insbesondere σ_{xy} für $N=0$ den endlichen Wert $2e^2/h$ annimmt. Dieser Unterschied hängt direkt mit der Topologie des Kristallgitters von Graphen zusammen: Aufgrund der Pseudospinstruktur der Wellenfunktion und der damit einhergehenden (starken) Kopplung von Pseudospin und orbitalen Freiheitsgraden, dreht sich der Pseudospin, wenn die Elektronen im Magnetfeld eine Kreisbewegung ausführen. Dies führt zu einer Phasenverschiebung um π in der Wellenfunktion. Die Verschiebung der Hall-Leitfähigkeit aufgrund dieser topologischen oder Berry-Phase wurde experimentell eindeutig identifiziert [8, 9] und gilt seitdem als Durchbruch der Forschung an Graphen.

Für Zwei-Schicht-Graphen entspricht die Messung der Hall-Leitfähigkeit der Standardsequenz $\sigma_{xy} = \pm 4 (e^2/h) N$ mit der Besonderheit, dass das Plateau für $N=0$ fehlt (Inset in Abb. 4). Der Grund für das fehlende Plateau bei $N=0$ liegt an den besonderen Eigenschaften der Anregungen in Zwei-Schicht-Graphen. Hierbei handelt es sich um chirale Quasiteilchen mit endlicher Masse [13].

1) Im Prinzip ist das in Si oder GaAs auch möglich. Die große Bandlücke erfordert dann aber eine große Energie, um vom Elektronen- zum Löchertransport überzugehen. In Graphen kostet dies wenig Energie, da die Bandlücke verschwindet.

Transport in Graphen

Eine der faszinierendsten Eigenschaften von Graphen ist die hohe Qualität der Kristallstruktur, trotz der bislang relativ wenig ausgereiften Präparationstechniken. Die Ladungsträgerkonzentration n lässt sich über die

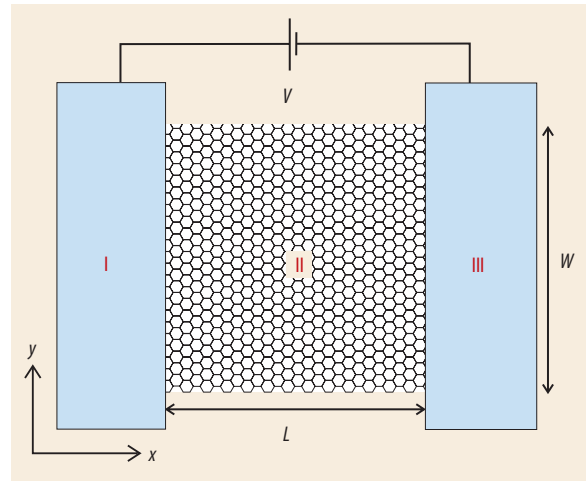


Abb. 5 Um den Transport durch ein Graphenband zu untersuchen, wird das Band (Breite W und Länge L) durch zwei Elektroden (gelb) kontaktiert, an die eine Spannung V angelegt wird (nach [15]). Der Transport wird mithilfe des Streumatrixformalismus beschrieben. Die drei Regionen des Streuproblems sind das linke Elektronenreservoir (I), die Graphen-Region (II) und das rechte Reservoir (III).

Spannung an einem Gatter problemlos so variieren, dass sowohl Transport durch Elektronen als auch durch Löcher möglich ist¹⁾, mit Konzentrationen von jeweils bis zu 10^{13} cm^{-2} . Die Mobilität μ in guten Präparaten liegt bei ca. $20000 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ und hängt kaum von der Temperatur ab. Typische Werte für die mittlere freie Weglänge sind einige hundert Nanometer. Die meisten bisherigen Experimente wurden mit Graphenpräparaten durchgeführt, die wesentlich größer waren als die mittlere freie Weglänge. Dann herrschen das quasi-ballistische oder das diffusive Regime, bei denen die Streuung an Störstellen den Transport dominiert. Schon jetzt ist aber ein Trend zu kleineren Graphenpräparaten erkennbar, da im ballistischen Regime, wenn der Abstand der Elektroden geringer ist als die mittlere freie Weglänge, interessante Physik und Anwendungen zu erwarten sind.

Die einfachste und mitunter experimentell relevanteste Art und Weise, ballistischen Transport durch mesoskopische Systeme zu beschreiben, ist die sog. Landauer-Transporttheorie [14]. Hierbei betrachtet man Transport als Transmissionsproblem und löst im Wesentlichen das Streuproblem durch eine beliebig komplizierte Barriere. Abb. 5 zeigt die drei Streuregionen.

Wie im letzten Abschnitt schon erwähnt, ist Ein-Schicht-Graphen ein Halbleiter ohne Bandlücke. Dies hat interessante Konsequenzen für den elektronischen Transport. Beispielsweise weist ein Übergang zwischen einer p-dotierten und einer n-dotierten Region in Graphen eine winkelabhängige Transmission auf. Ist der Einfallswinkel senkrecht zum p-n-Übergang, so findet überhaupt keine Reflexion statt [16]. Für solch einen Einfallswinkel wirkt demnach ein elektrostatisches Potential nicht als Barriere für die Elektronen. Dieses Phänomen wird in der Hochenergie-Physik auch als Klein-Paradox bezeichnet, da es auf dem Tunnelprozess von teilchenartigen Zuständen (Elektronen) in antiteilchenartigen Zuständen (Löcher) beruht. In Graphen beruht

DER QUANTEN-HALL-EFFEKT

Der Quanten-Hall-Effekt (QHE) ist ein robustes Transportphänomen in zweidimensionalen Elektronengasen (2DEG), an die ein starkes Magnetfeld senkrecht zur Fläche angelegt wird [10]. In einem Magnetfeld bewegen sich Elektronen auf Kreisbahnen, die quantisiert sind. Diese sog. Landau-Quantisierung lässt sich in Graphen leicht aus Gl. (iii) (im Infokasten „Tight-Binding-Modell“) berechnen, wobei $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ durch $\vec{p} + (e \vec{A}/c)$ zu ersetzen ist. Das Vektorpotential $\vec{A} = (B/2)(-y, x)$ beschreibt ein magnetisches Feld B senkrecht zur Graphenfläche. Daraus ergibt sich für das Spektrum

$$E_N^{(\text{Graphen})} = \pm v_F \sqrt{2e\hbar BN}, \quad (\text{iv})$$

mit der orbitalen Quantenzahl $N=0, 1, 2, 3, \dots$ der Landau-Niveaus.

Im Gegensatz dazu verhält sich die Landau-Quantisierung für ein „normales“ 2DEG (wie z. B. in einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur) ganz anders. Ausgehend von der Schrödinger-Gleichung

$$\frac{(\vec{p} + (e\vec{A}/c))^2}{2m^*} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (\text{v})$$

zeigt sich, dass

$$E_N^{(2\text{DEG})} = \hbar \omega_c (N + 1/2), \quad (\text{vi})$$

mit $N=0, 1, 2, 3, \dots$ ist. Hierbei ist $\Psi(\vec{r})$ die Wellenfunktion, m^* die effektive Masse, die durch das Potential der Atomrümpfe bestimmt wird, und $\omega_c = eB/m^*$ die Zyklotronfrequenz.

Die Gleichungen (iv) und (vi) unterscheiden sich im Wesentlichen in dreierlei Hinsicht: (1) Bei Graphen gibt es Lösungen positiver und negativer Energien, im normalen 2DEG dagegen nur Lösungen positiver Energien. (2) In Graphen gibt es ein Landau-Niveau bei $E_0^{(\text{Graphen})} = 0$, im normalen 2DEG ist die niedrigste Energie $E_0^{(2\text{DEG})} = \hbar \omega_c/2$ von Null verschieden. (iii) In Graphen sind die unterschiedlichen Landau-Niveaus im Gegensatz zum 2DEG nicht äquidistant.

Der Einfluss von Störstellenstreuung führt zu einer Verbreiterung der Landau-Niveaus. Die Hall-Leitfähigkeit lässt sich dann mit der Kubo-Formel berechnen, und man erhält für Graphen Gl. (2) [11, 12].

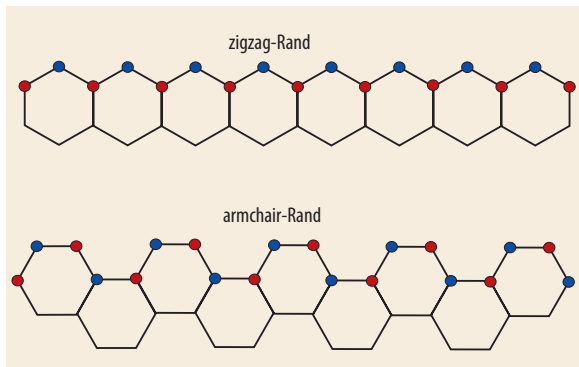


Abb. 6 Auf atomarer Skala treten zwei verschiedene Randarten bevorzugt auf, die *zigzag*- und die *armchair*-Ränder. Sie wirken sich ganz unterschiedlich auf die elektronischen Eigenschaften von Graphenstreifen aus. Das liegt vor allem daran, dass die *zigzag*-Ränder nur durch Atome eines Typs terminiert sind, die *armchair*-Ränder jedoch durch Atome von beiden Untergittern.

dieses Phänomen einfach auf Interbandtunneln (Leitungs- nach Valenzbandzustände oder umgekehrt).

In einer bandartigen Struktur (**Abb. 5**) sieht die Situation etwas anders aus. Hier spielen die Randbedingungen am oberen und am unteren Rand in y -Richtung eine wichtige Rolle. Das kommt daher, dass solche Randbedingungen zu einer Quantisierung der Wellenzahl k_y in y -Richtung führen. Die Randbedingungen lassen sich in zwei große Klassen einteilen. Das sind zum einen solche auf atomarer Skala. Hierzu zählen als bekannteste Vertreter die sog. *armchair*- und *zigzag*-Randbedingungen (**Abb. 6**). Experimente deuten darauf hin, dass diese beiden Randarten in realen Graphenpräparaten bevorzugt auftreten [3]. In der Tight-Binding-Beschreibung von Graphen ist das Spektrum von Bändern mit *zigzag*-Rändern immer metallisch, während das Spektrum von Bändern mit *armchair*-Rändern metallisch oder halbleitend sein kann. Das hängt davon ab, wieviele Einheitszellen des realen Gitters in die Breite des Graphenbandes hineinpassen. Zum anderen gibt es Randbedingungen, die flach auf atomarer Skala sind. Das ist z. B. eine Randbedingung, die sich durch einen ortsabhängigen Term $M(x,y) \sigma_z$ in Gl. (iii) beschreiben lässt (die sog. *infinite mass*-Randbedingung), und garantiert, dass der Stromfluss durch den Rand des Präparats verschwindet. Diese Randbedingung ist (möglicherweise) in Graphen mit geschnittenen Rändern realisiert (nach einem *edging*-Prozess).

Randbedingungen können den Transport durch Graphenstreifen drastisch beeinflussen. Das Spektrum kann je nach Randbedingung eine Bandlücke aufweisen oder auch nicht. Für einen breiten Graphenstreifen mit geringem Elektrodenabstand $W/L \gg 1$ spielen die verschiedenen Randbedingungen aber keine Rolle mehr, und man erhält ein universelles Resultat für Transportgrößen wie beispielsweise den Strom und das Stromrauschen. Hierbei stellt sich heraus, dass alle Transportgrößen für ballistisches Graphen eine enge Verwandtschaft mit denjenigen für verunreinigte Metalle oder Halbleiter haben, die sich durch die Schrödinger-Gleichung beschreiben lassen [15]. Der physikalische Grund für diese Korrespondenz ist noch unklar.

Transportmessungen in Graphen zeigen, dass die elektrische Leitfähigkeit σ am Dirac-Punkt immer in der Nähe von $4 e^2/h$ liegt (**Abb. 7**). Nahezu alle Theorien sagen aber eine elektrische Leitfähigkeit von $(4/\pi) e^2/h$ voraus, d. h. die gemessene Leitfähigkeit ist ca. dreimal größer als die vorhergesagte. Diese Diskrepanz ist eine der großen offenen Fragen und hängt vermutlich mit der Streuung an Störstellen zusammen. Theoretischen Vorhersagen zufolge haben verschiedene Arten von Störstellen ganz unterschiedliche Auswirkungen auf den Transport. So lässt sich die gemessene (lineare) Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Ladungsträgerdichte nur richtig verstehen, wenn man annimmt, dass in Graphen entweder geladene Störstellen oder sehr starke Störstellen (im sog. unitären Limes) die dominanten Streuzentren sind [17].

Spintronik und Quanten-Bits

Eine Reihe von interessanten Perspektiven lässt Graphen als sehr zukunftssträchtiges Material erscheinen. Auf der experimentellen Seite ist es vor kurzem gelungen, freihängendes Graphen auf Stützen zu befestigen und mit dem Elektronenmikroskop (TEM) zu untersuchen [18]. Man kann sich einen solchen Aufbau als ein Trampolin vorstellen, das nur aus einer atomaren Schicht besteht. Da die Substrateffekte dadurch verschwinden, lassen sich zum einen die intrinsischen Eigenschaften von Graphen deutlicher beobachten. Zum anderen eröffnen sich interessante Möglichkeiten für die Nanomechanik [19].

Wie eingangs erwähnt, haben Elektronen in Graphen nicht nur eine Spinquantenzahl, sondern auch eine Valley-Quantenzahl, die durch die Topologie des Gitters begründet ist. Diese Quantenzahl könnte sich als recht robust gegenüber äußeren Störungen erweisen, da es eines sehr großen Impulsübertrags bedarf, um ein Elektron von einem Valley in das andere zu streuen. Dies könnte es interessant machen, den Valley-Freiheitsgrad für Anwendungen zu nutzen, ähnlich wie den Spinfreiheitsgrad in dem Forschungsgebiet Spintronik. Ein erster Schritt in diese Richtung ist der Vorschlag eines Valley-Filters, der auf einem sehr schmalen Graphenband mit *zigzag*-Rändern beruht [20].

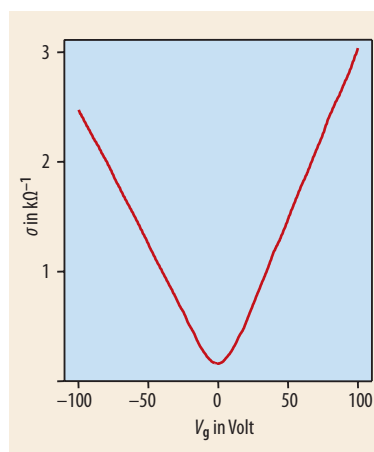


Abb. 7 Ein typisches Beispiel einer Messung der elektrischen Leitfähigkeit σ als Funktion der angelegten Gatterspannung V_g (bei 10 K, nach [8]). Am Ladungsneutralitätspunkt ist die elektrische Leitfähigkeit minimal und nimmt einen Wert in der Nähe von $4e^2/h$ an. Die Leitfähigkeit zeigt eine lineare Abhängigkeit von der Gatterspannung, wenn man sich vom Ladungsneutralitätspunkt entfernt.

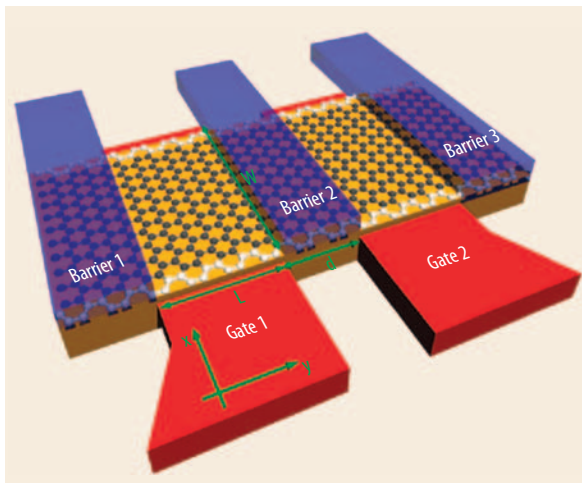


Abb. 8 Ein doppelter Quantenpunkt in Graphen mit jeweils einem Elektron könnte als ideales Zwei-Qubit-Gatter für Spin-Qubits fungieren (nach [21]). Die *armchair*-Ränder sorgen für eine Bandlücke im Spektrum und heben die Valleyentartung auf (weiß). Die drei Barrieren (blau) definieren die Abmessungen der beiden Quantenpunkte. Die Gatter (rot) erlauben es, die Energieniveaus der Quantenpunkte unabhängig voneinander zu variieren.

Graphen ist ein vielversprechendes Material für Anwendungen, in denen der Spinfreiheitsgrad der Elektronen eine Rolle spielt, da sehr lange Spin-Relaxations- und Spin-Dephasierungszeiten zu erwarten sind. Zwei Hauptmechanismen, die zu Relaxation und Dephasierung führen, sind die Spin-Bahn-Kopplung in Kombination mit der Elektron-Phonon-Kopplung und die Hyperfeinwechselwirkung des Spins der Elektronen mit den Kernspins des Kohlenstoffgitters. Es ist bekannt, dass die Spin-Bahn-Kopplung in Graphen schwach ist, weil Kohlenstoff ein eher leichtes Element ist. Darüber hinaus besteht Graphen zu 99 % aus ^{12}C , das keinen Kernspin hat. Das macht Graphen zweifelsohne zu einem interessanten, wenn nicht sogar idealen Material für Spin-Qubits in Quantenpunkten [21]. Hierbei stört der Valley-Freiheitsgrad nun eher, da er es verhindert, die Austauschwechselwirkung für Zwei-Qubit-Gatter zu nutzen. Daher ist es wichtig, einen Aufbau zu finden, in dem die Valley-Entartung aufgehoben ist. Dies ist möglich, wenn man sich ein Graphenband mit halbleitenden *armchair*-Rändern zunutze macht [22] (Abb. 8). Graphen ist nicht nur aufgrund seiner Materialeigenschaften interessant für Spin-Qubits, sondern eröffnet auch ganz neue Aspekte der Kopplung zweier Qubits über große Distanzen [22]. Diese besondere Eigenschaft kann für eine effizientere Fehlerkorrektur in Quantencomputern genutzt werden.

Die aktuellen Entwicklungen in der Erforschung von Graphen sind überaus dynamisch und spannend. Das liegt daran, dass sich Graphen in jeder Beziehung anders verhält als es von der langjährigen Erfahrung mit Halbleitermaterialien wie beispielsweise Silizium oder Galliumarsenid zu erwarten wäre. Das ist das wirklich besondere an Graphen – man entdeckt die Welt neu.

Danksagung

Ich möchte mich hier bei den zahlreichen Kollegen bedanken, mit denen ich die Möglichkeit hatte, gemeinsam auf dem Forschungsgebiet Graphen zu arbeiten. Dies sind insbesondere Carlo Beenakker, Yaroslav Blanter, Denis Bulaev, Guido Burkard, Daniel Loss, Alberto Morpurgo, Patrik Recher, Adam Rycerz, Misha Titov und Jakub Tworzydło.

Literatur

- [1] P. R. Wallace, *Phys. Rev.* **71**, 622 (1947)
- [2] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva und A. A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004)
- [3] A. K. Geim und K. S. Novoselov, *Nature Mat.* **6**, 183 (2007)
- [4] C. Berger et al., *J. Phys. Chem. B* **108**, 19912 (2004)
- [5] A. Bostwick, T. Ohta, T. Seyller, K. Horn und E. Rotenberg, *Nature Phys.* **3**, 36 (2007)
- [6] R. Saito, M. S. Dresselhaus und G. Dresselhaus, *Physical Properties of Carbon Nanotubes*, Imperial College Press (1998)
- [7] M. S. Dresselhaus, G. Dresselhaus und A. Jorio, *Group Theory. Application to the Physics of Condensed Matter*, Springer, Berlin (2007)
- [8] K. S. Novoselov et al., *Nature* **438**, 197 (2005)
- [9] Y. Zhang, J. W. Tan, H. L. Stormer und P. Kim, *Nature* **438**, 201 (2005)
- [10] R. E. Prange und S. M. Girvin (Hrsg.), *The Quantum Hall Effect*, Springer (1990).
- [11] V. P. Gusynin und S. G. Sharapov, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146801 (2005)
- [12] N. M. R. Peres, F. Guinea und A. H. Castro Neto, *Phys. Rev. B* **73**, 125411 (2006)
- [13] K. S. Novoselov et al., *Nature Phys.* **2**, 177 (2006)
- [14] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1995)
- [15] J. Tworzydło, B. Trauzettel, M. Titov, A. Rycerz und C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 246802 (2006)
- [16] V. V. Cheianov und V. I. Fal'ko, *Phys. Rev. B* **74**, 041403 (2006)
- [17] I. L. Aleiner und K. B. Efetov, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 236801 (2006); P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi und A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **74**, 235443 (2006); K. Nomura und A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 076602 (2007)
- [18] J. C. Meyer, A. K. Geim, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, T. J. Booth und S. Roth, *Nature* **446**, 60 (2007)
- [19] J. Scott Bunch et al., *Science* **315**, 490 (2007)
- [20] A. Rycerz, J. Tworzydło und C. W. J. Beenakker, *Nature Phys.* **3**, 172 (2007)
- [21] D. Loss und D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. A* **57**, 120 (1998)
- [22] B. Trauzettel, D. V. Bulaev, D. Loss und G. Burkard, *Nature Phys.* **3**, 192 (2007)

DER AUTOR

Björn Trauzettel studierte Physik in Freiburg und Seattle (U.S.A.). Er promovierte 2003 an der Universität Freiburg und ging anschließend an das Laboratoire de Physique des Solides in Orsay (Frankreich). Es folgten weitere Forschungsaufenthalte an den Universitäten Leiden und Delft (Niederlande) sowie an der Universität Basel (Schweiz). Im Oktober 2007 tritt er eine Professur mit Forschungsschwerpunkt Theorie der Mesoskopischen Physik an der Universität Würzburg an. In seiner Freizeit entspannt er sich auf Ausflügen mit seiner Familie und genießt es, überschüssige Energien auf der Judomatte abzubauen.

